Проф. В. М. СЕРЕБРОВСЬКИЙ

# ПІДПІРНІ СТІНКИ

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНИ

(2)

Проф. В. М. СЕРЕБРОВСЬКИЙ

# ПІДПІРНІ СТІНКИ

Державний Науково-Методологічний Комітет Наркомосвіти У.С.Р.Р. по секції професійної освіти дозволив до вжитку як підручник для індустр.-технічних ВУЗ'ів



ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
1926

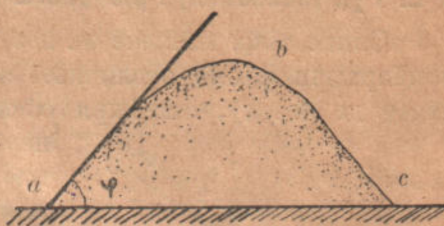
69(02):62=91.79

Термінологію зредаговано в Інституті Української Наукової Мови Української Академії Наук.

Укрголовліт № 2000 (17884). 1926.
З друкарні Державного Видавництва України — УАН.
Зам. № 5271 — 3000.

## § 1. Сипкі тіла.

Середне місце між твердими та плинними тілами займають так звані **сипкі** тіла; до таких тіл належить пісок, крихкий ґрунт, земля (так звані землисті тіла), зерно, шріт та инші. Плинне тіло, як відомо, перебуває в рівновазі, якщо околичня поверхня його є позема площа; тверде тіло може перебувати в рівновазі при довільній формі його околичньої поверхні. Що-ж до сипких тіл, то вони, коли їх помістити на позему поверхню, перебувають у рівновазі, якщо їх околичня поверхня має певний вигляд $abc$ (фіг. 1), що залежить од властивостів самих сипких тіл; вигляд цієї поверхні $abc$ характеризується кутом $\varphi$ нахилу до позему.

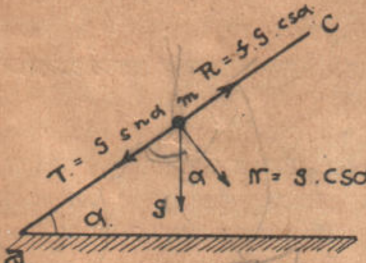


Фіг. 1.

Маса такого сипкого тіла, насипана на позему площу, поволі розповзається по цій площі, поки дійде стану рівноваги маси; і форма поверхні $abc$ (фіг. 1) її рівноваги характеризується кутом $\varphi$ нахилу до позему. Маса сипкого тіла, насипана на поземій площі без жадних стінок (перепон), що відгороджували-б її з боків, отже форма її околичньої поверхні рівноваги саме й єсть її **природня поверхня**; через те кут $\varphi$, що характеризує нахил цієї поверхні до позему, зветься **кутом природнього укосу** (der natürliche Böschungswinkel, l'angle du talus naturel). Отже, сипке тіло має свій певний кут природнього укосу. Ідеальний плин, в якого зовнішня поверхня є позема площа, має кут природнього укосу рівний нулеві ($\varphi = 0$). Ідеальний плин, коли його помістити на поземій площі, ввесь цілком по ній розповзеться; себ-то між частинками такого плину нема тертя; в сипкому-ж тілі між його частинками (напр., між частинками піску або землі) є тертя, через те поверхня рівноваги в маси такого сипкого тіла й зберегає свою певну форму. Кут $\varphi$ природнього укосу, що характеризує поверхню рівноваги сипкого тіла, і являє собою ту найбільшу допустиму границю кута нахилу вільної поверхні маси сипкого тіла до позему. Величина цього кута природнього укосу залежить, звичайно, від стану самого сипкого тіла. Якщо до сипкого тіла додати якогонебудь надіб'я, що цементує, напр. вогкої глини, то між частинками сипкого тіла з'явиться ще й спійність; при крихкому ґрунті, напр. піску, жорстві, свіжо насипаній землі, ця спійність незначна; у ґрунті злежалому або утальованому, ця спійність частинок помітно збільшується і через те насип із такого ґрунту може перебувати в рівновазі (не осипатися), коли кут укосу помітно більший за кут природнього укосу. Такий є, наприклад, чорноземний ґрунт (рослинна земля).

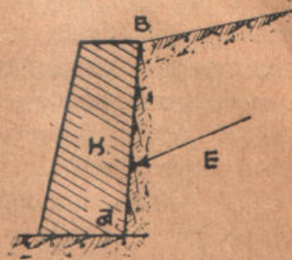
## § 2. Рух (ковзання) і рівновага сипкого тіла на похилій площі.

Сипке тіло, вміщене на поземій площі, обсипається (фіг. 1), прибираючи форми околичньої поверхні з кутом $\varphi$ природнього укосу до позему, отже при обсипанні маси його відбувається переміщення частинок по похилій площі; через те до речи буде розглянути рух частинок сипкого тіла по похилій площі. Хай частинка $m$ сипкого тіла (фіг. 2), напр. частинка землі, лежить на похилій площі $AC$, що утворює з поземом кут $\alpha$. Розкладімо вагу $G$ частинки $m$ на складові $N = G \,.\, cs\alpha$, нормальну до похилої площі, і




Фіг. 2.

$T = G \,.\, sn\alpha$, що діє вдовж похилої площі. Сила $T = G \,.\, sn\alpha$ намагається перемістити частинку $m$ униз по похилій площі; цьому переміщенню ставить опір сила тертя $R = f \,.\, N = f \,.\, G \,.\, cs\alpha$, що скерована в бік противний силі $T$. Якщо $T > R$, то частинка $m$ буде посуватися вниз похилою площею; отже в цьому випадкові $G \,.\, sn\alpha > f \,.\, G \,.\, cs\alpha$, себ-то $tg\alpha > f$; а що сучинник тертя сипкого тіла $f = tg\varphi$, де $\varphi$ є кут тертя сипкого тіла, то $tg\alpha > tg\varphi$ або $\alpha > \varphi$; себ-то коли сипка маса насипана під кутом до позему більшим за кут тертя, то буде відбуватись обсипання сипкої маси. Якщо $T = R$, то частинка $m$ буде в спокою, себ-то в такому стані, що тільки-тільки не посувається вниз по похилій площі; цей стан частинки $m$ є стан граничної рівноваги; у цьому випадкові $G \,.\, \mathrm{sn}\alpha = f \,.\, G \,.\, \mathrm{cs}\alpha$ або $\mathrm{tg}\alpha = f = \mathrm{tg}\varphi$, себ-то $\alpha = \varphi$. Отже, коли сипка маса насипана під кутом до позему більшим за кут тертя, то вона буде обсипатися доти, доки околичня поверхня, що її обмежує, не матиме нахилу до позему рівного куту тертя; цей кут відповідатиме кутові природнього укосу (фіг. 1). Наприклад, маса землі, що насипана під кутом, більшим за кут природнього укосу, не може сама по собі зберегти рівновагу і буде обсипатися; щоб удержати таку земляну масу від обсипання (сповзання), вживають різних перепон у формі так званих підпірних стінок (фіг. 3) (die Stützmauer, le mur de soutènement); така підпірна стінка $K$ відчуває з боку тієї земляної маси, що міститься позад її заднього боку $AB$, певний тиск $E$; цей тиск $E$ і є тиск землі на підпірну стінку; його й повинно взяти на увагу, розглядаючи умови стійкости й міцности стінки. Треба зауважити, що вираховуючи підпірні стінки, звичайно не беруть на увагу спійности частинок земляної маси і вводять в обрахунок тільки тертя між частинками, гадаючи, що на засипку задньої сторони підпірної стінки піде цілком сухий, крихкий ґрунт.



Фіг. 3.

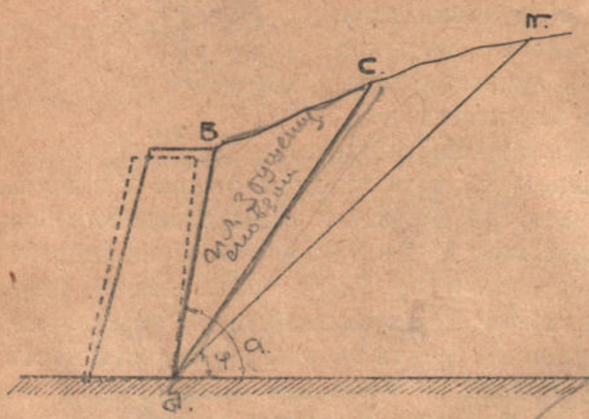
В нижченаведеній таблиці ми даємо розміри кутів природнього укосу для різних сипких тіл.

*Таблиця I.*

| Назва сипкого тіла | Кут природнього укосу $\varphi^0$ | Сучинник тертя $f = \mathrm{tg}\varphi$ | Вага одного кубічного метра в кілограмах |
|---|---|---|---|
| Глина суха . . . . . . . . . . . . | 40 | 0,839 | 1600 (1550) |
| „ насичена водою . . . . . . . | 20 | 0,364 | 1900 |
| „ природньої вогкости (злегла) . | 45 | 1,000 | 1600 |
| Чорнозем сухий . . . . . . . . . | 40 | 0,839 | 1400 |
| „ насичений водою . . . . . | 30 | 0,577 | 1800 |
| „ природн. вогкости (злеглий) | 45 | 1,000 | 1600 |
| Пісок або жорства сухі . . . . . . . | 30 | 0,577 | 1600 |
| „ насичений водою . . . . . . | 24 | 0,445 | 1800 (2000) |
| Дрібняк . . . . . . . . . . . . . . | 35 | 0,700 | 1600 |
| Жорства рубчаста . . . . . . . . | 38 | 0,781 | 1800 |
| „ кругляста . . . . . . . . . | 45 | 1,000 | 1800 |
| Зерно . . . . . . . . . . . . . . | 30 | 0,577 | 750 |

## § 3. Площа зрушення (ковзання); призма зрушення (ковзання).

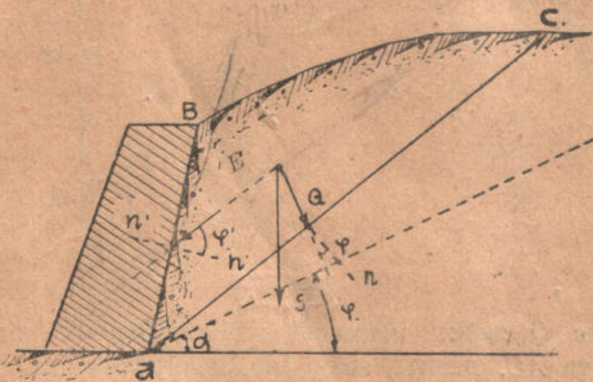
Припустімо, що ми маємо підпірну стінку $K$ (фіг. 4), що з її заднім боком $AB$ межує земляний насип, обмежений зокола поверхнею $BN$; беручи поверхню $BN$, як нормальну до площі рисунка, матимемо криву $BN$, що обмежує насип. Якщо підпірна стінка $K$ в наслідок тиску землі, або нерівномірного осідання, відхилиться трохи (дуже мало) від свого початкового положення, прийнявши те положення, що позначене на фіг. 4 крапковою лінією, то та маса землі, що буде позад неї, намагатиметься сповзати вниз; це сповзання вниз відбуватиметься по якійсь площі $AC$ (або лінії $AC$, в перетині з площею рисунка), що утворює з поземом кут $\alpha$ більший за кут $\varphi$ природнього укосу, як це було зазначено в попередньому §; через те, коли проведемо площу $AN$ під кутом $\varphi$ природнього укосу до позему, то площа $AC$, по якій відбуватиметься сповзання, проходитиме між заднім боком $AB$ стінки й площею $AN$ природнього укосу. Таким чином, позаду підпірної стінки $K$ відбуватиметься сповзання, або сковзання, або зрушення земляної маси в формі земляної призми $ABC$ по площі $AC$. Ця площа $AC$, що по ній відбувається сповзання земляної призми $ABC$, зветься **площею зрушення** або **сповзання** (die Gleitfläche, surface de rupture); призма-ж $ABC$ зветься **призмою зрушення** або **сповзання** (das Gleit- oder Rutschprisma, le prisme de plus grande poussée за Coulomb). Припущення, що зрушення земляної призми відбувається по площі $AC$, взагалі не досить обґрунтоване; це є тільки гіпотеза; але беручи на увагу, що справжній вигляд поверхні $AC$ зрушення не цілком установлений, ми спинимося на гіпотезі **площі** зрушення (сповзання). Цю гіпотезу **площі** зрушення дав французький військовий інже-




Фіг. 4.

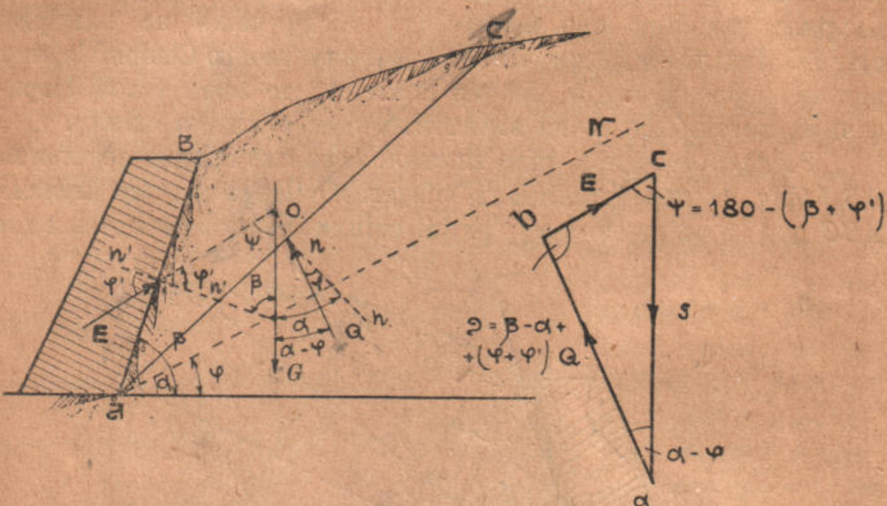
ніp Coulomb в свойому мемуарі „Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture“. Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie Royale des sciences par divers savants. T. VII, année 1773. Paris 1776. У цьому мемуарі Coulomb дослідив питання про визначення тиску землі на підпірну стінку. Надалі ми братимем за підвалину теорію Coulomb'а, яку розвинув французький інженір Poncelet, що вжив також і графічних метод, щоб точно визначити тиск землі на стінку.

Розгляньмо тепер, підо впливом яких сил призма зрушення *ABC* (фіг. 4) перебуватиме в рівновазі. Через те, що призма *ABC* при безмірно-малому ухилі стінки намагається сповзати




Фіг. 5.

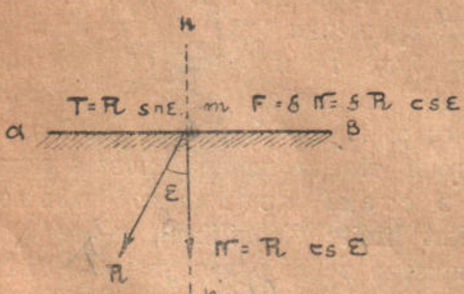
вниз, в площі *AC* сповзання та площі *AB* стінки виявиться тертя; при цьому в площі *AC* зрушення буде тертя землі об землю, а в площі *AB* стінки буде тертя землі об матеріял стінки. Тертя в обох площах *AC* та *AB*, звичайно, направлено вгору від *A* до *C* та *B*. Хоч ми розглядаємо призму *ABC* зрушення в такому стані, що вона тільки що не сповзає вниз, себ-то, що вона перебуває в стані граничної рівноваги (Grenzgleichgewicht, l'état limite d'équilibre), проте при її тенденції сунути вниз ми можемо не звертати уваги на сили спійности в площах *AC* та *AB*, бо в той момент, коли призма *ABC* починає рухатись, спійности більш нема; тим-то ми беремо на увагу тільки тертя в площах *AC* та *AB*.. Призма зрушення *ABC* через свою вагу *G* (фіг. 5) тисне на площі *AB* стінки на стінку з силою *E* (тиск землі на стінку) і на площі *AC* на ту масу землі, що лежить нижче, з силою *Q*; через це стінка чинить опір або реакцію $E$, що скерована в протилежний бік од тиску $E$ землі (фіг. 6), а маса землі, що є нижче від площі $AC$, виявляє реакцію $Q$, скеровану в протилежний бік од тиску $Q$; отже призма $ABC$ перебуватиме в рівновазі підо впливом трьох сил $E$, $Q$ та $G$.




Фіг. 6.

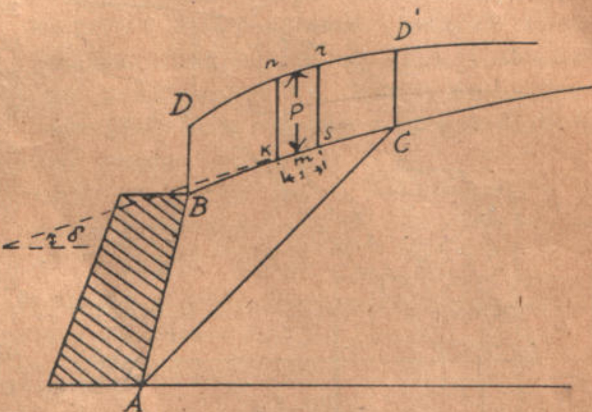
Сили $E$ та $Q$ своїми нормальними складовими, відповідно до площ $AB$ та $AC$, дають, звичайно, в цих площах сили тертя.

З'ясуймо тепер, як скеровані ці сили $E$ та $Q$. Для цього розгляньмо рівновагу на якійсь площі $ab$ (фіг. 7) частинки $m$ землі




Фіг. 7.

підо впливом сили $R$, скерованої під кутом $\varepsilon$ до нормали $nn$ площі $ab$. Сила $R$ розкладається на дві складові: $T = R.\ \mathrm{sn}_\varepsilon$ в площі $ab$, та $N = R.\ \mathrm{cs}_\varepsilon$ нормальну до площі $ab$, причому складова $N$ дає силу тертя $F = f.\ N = f.\ R.\ \mathrm{cs}_\varepsilon$. Якщо частинка $m$ перебуває в рівновазі, то $T = F$ або $R.\ \mathrm{sn}_\varepsilon = f.R.\ \mathrm{cs}_\varepsilon$, звідки $\mathrm{tg}_\varepsilon = f = \mathrm{tg}_\varphi$, себ-то $\varepsilon = \varphi$. Отже частинка $m$ буде в рівновазі на площі $ab$, якщо сила $R$, що діє на неї, утворює з нормаллю до площі кут рівний кутові тертя $\varphi$. Через те і в призмі зрушення $ABC$ (фіг. 5) частинки землі не посуватимуться в площі $AB$, якщо сила $E$ утворюватиме з нормаллю $n'n'$ до площі $AB$ кут $\varphi'$ тертя землі об матеріял стінки; так само і в площі $AC$ зрушення частинки землі не посуватимуться, якщо сила $Q$ утворює кут тертя $\varphi$ землі об землю з нормаллю $nn$ до площі $AC$. Отже, призма зрушення $ABC$ перебуватиме в рівновазі, коли на неї діятиме сила ваги $G$ (фіг. 6), реакції $E$ (що її величина дорівнює тискові землі на стінку й противна напрямом) під кутом $\varphi'$ тертя землі об стінку до нормали площі $AB$ і реакції $Q$ (противний тиск маси землі, що лежить нижче за площу $AC$ зрушення) під кутом $\varphi$ тертя землі об землю до нормали площі $AC$; трикутник сил $Q, E$ та $G$ буде замкнений трикутник $abc$ (фіг. 6). Кути $\varphi'$ та $\varphi$ будуть найбільші значіння кутів, що їх складають $E$ та $Q$ з нормалями $n'n'$ та $nn$ до площ $AB$ та $AC$, і в цьому випадкові призма $ABC$ зрушення буде в стані граничної рівноваги, себ-то тільки що не посуватиметься вниз. З фіг. 6 видно, що в силовому трикутникові $abc$ кут між силою $Q$ та прямовісною силою $G$ ваги доріьнює $\alpha - \varphi$, кут між тиском землі $E$ та прямовісною силою $G$ ваги дорівнює $\psi = 180^0 - (\beta + \varphi')$ і кут між силою $Q$ та тиском землі $E$ дорівнює $\vartheta = 180^0 - [\psi + (\alpha - \varphi)] = \beta - \alpha + (\varphi + \varphi')$. Якщо $T < F$ (фіг. 7), то $R . \mathrm{sn}\varepsilon < f . R . \mathrm{cs}\varepsilon$, себ-то $\varepsilon < \varphi$; в цьому випадкові точка $m$ не переміщатиметься по площі $ab$ і значить рівновага її напевно забезпечена.

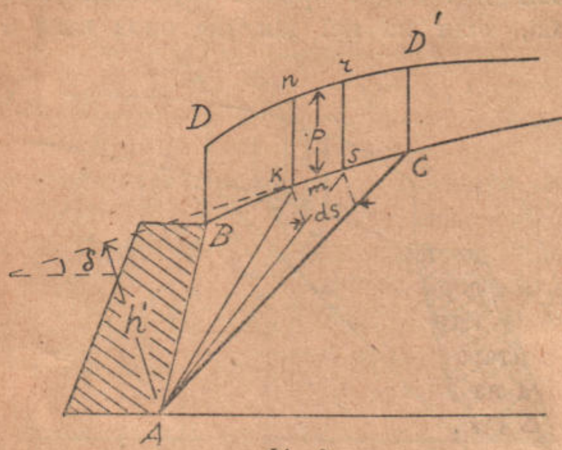


Фіг. 8.

## § 4. Навантаження околичньої поверхні землі, що йде на засипку підпірної стінки.

На околичній поверхні землі $BC$ (фіг. 8) звичайно буває розміщене якесь навантаження в формі розподіленої вантаги або скупчених вантаг (наприклад, тиск коліс од возового складу).

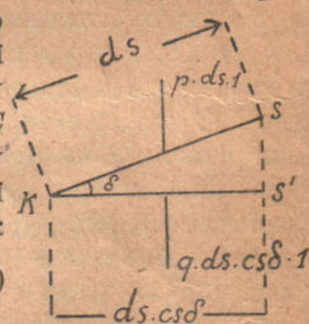
Припустімо, що поверхня землі $BC$ (фіг. 8) навантажена розподіленою вагою $p$ на одиницю довжини лінії $BC$, причому закон зміни цієї вантаги являє собою крива $DD'$. Розглядаючи підпірну стінку, ми братимем стінку завдовжки з одиницю (напр. 1 метр) в напрямові нормальному до площі рисунку. Коли в якійсь точці $m$ поверхні $BC$ землі виділимо довжину $ks$, що дорівнює одиниці, то вантага $p$ в цій точці $m$ буде являти собою тиск на похилу площинку розміром в одну квадратову одиницю (прямокутник з основою $ks=1$ і висотою, що дорівнює одиниці в напрямові, нормальному до площі рисунку); отже $p$ є тиск на одиницю площі в точці $m$, нахиленої під кутом $\delta$ до позему.



Фіг. 9.

Візьмімо тепер безмірно-малу довжину $ks=ds$ при точці $m$ кривої $BC$ (фіг. 9); тоді тиск на елементарну площинку $ds.1$ дорівнюватиме $p.ds.1$ (фіг. 10). Якщо візьмемо позему площинку $ks'$ (фіг. 10), розмір якої дорівнює $ds.1.\cos\delta$, де $\delta$ є кут нахилу до позему дотичної в точці $m$ кривої $BC$ або, через малість дуги $ds$, кут нахилу тятиви $ks$ до горизонту, то на одиницю цієї поземої площинки буде прямовісний тиск

$$q=\frac{p.ds.1}{ds.\cos\delta.1}=\frac{p}{\cos\delta}. \qquad (1)$$



Фіг. 10.

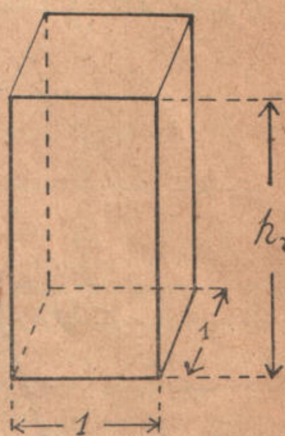
Дану розподілену вантагу $p$ на одиницю довжини поверхні $BC$ землі можна також замінити на вагу шару землі відповідної висоти й збудувати також криву вантаги. Якщо візьмемо в якійсь точці $m$ поверхні $BC$ землі (фіг. 8) позему площинку, що дорівнює одиниці (1.1 квадр. один.), то прямовісний тиск на неї буде $q.1.1$; але з другого боку прямовісний тиск на цю площинку від ваги землі дорівнюватиме вазі земляного рівнобіжностінника з основою 1.1 квадр. один. (фіг. 11) і з якоюсь висотою $h_r$; якщо вага одиниці об'єму землі є $\gamma$, то вага такого рівнобіжностінника буде $\gamma\,.\,1\,.\,1\,.\,h_r$. Отже, $q\,.\,1\,.\,1 = \gamma\,.\,1\,.\,1\,.\,h_r$, звідки

$$h_r = \frac{q}{\gamma} = \frac{p}{\gamma\,.\,\mathrm{cs}\delta}. \tag{2}$$

Через те, що ми замінили дану розподілену вантагу $p$ на відповідну вантагу земляного шару, себ-то звели вантагу $p$ до землі, то висота $h_r$ земляного шару зветься „зведена висота“ (die reducirte Höhe, hauteur réduite); на фіг. 12 і показана крива $RR'$ „зведеної до землі вантаги“. Якщо ми візьмемо елементарну призму $Aks$ (фіг. 9) з основою в формі безмірно-малого $\triangle Aks$ та висотою, рівною одиниці (в напрямові нормальнім до площі рисунку), то вага цієї призми дорівнюватиме $\gamma\,.\triangle Aks\,.\,1$; на площинці $ds\,.\,1$ тисне на безмірно-малу призму $Aks$ вантага $p\,.\,ds\,.\,1$, значить, прямовісна вантага на елементарну призму $Aks$ буде $dG = \gamma\,.\triangle Aks\,.\,1 + p\,.\,ds\,.\,1 = \triangle Aks\,.\,1\left(\gamma + \frac{p\,.\,ds}{\triangle Aks}\right)$; але $\triangle Aks = \frac{1}{2}\,.\,ds\,.\,h'$ (фіг. 9), а тому

$$dG = \triangle Aks\,.\,1\,.\left(+\gamma\frac{p\,.\,ds}{\frac{1}{2}ds\,.\,h'}\right) =$$

$$= \triangle Aks\,.\,1\left(\gamma + \frac{2p}{h'}\right); \tag{3}$$



Фіг. 11.

беручи $\gamma + \frac{2p}{h'} = \gamma'$, маємо, що

$$dG = \gamma'\,.\triangle Aks\,.\,1\,. \tag{3'}$$

Звідси виходить, що прямовісна сила $dG$, яка діє на елементарну призму $Aks$, може бути представлена вагою цієї призми, якщо вага одиниці об'єму її дорівнює:

$$\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h'}.$$

Позначаючи розмір поверхні елементарного трикутника $Aks$ через $dF$, напишемо формулу (3′) в такому вигляді:

$$dG = 1\,.\,dF\,.\left(\gamma + \frac{2p}{h'}\right). \tag{3''}$$

При розподіленій вантазі $p$ по довжині $BC$ (фіг. 9) повна прямовісна сила, що діє на призму зрушення $ABC$, дорівнюватиме згідно з $(3'')$

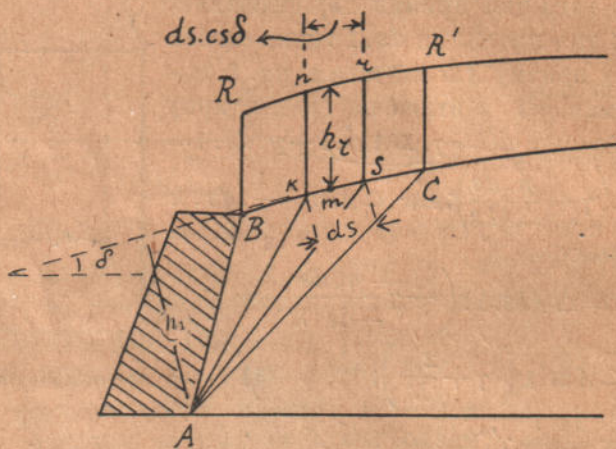
$$G = \int 1 \,.\, dF \left( \gamma + \frac{2p}{h'} \right). \tag{4}$$

У випадкові „зведеної вантаги“ (фіг. 12), щоб отримати прямовісну силу, що діє на елементарну призму $Aks$, треба в виразі $(3'')$ підставити значіння $p$ з (2) через $h_r$; тоді

$$dG = \gamma \,.\, dF \,.\left(1 + \frac{2 \,.\, h_r \,.\, cs\delta}{h'}\right).1. \tag{5}$$

Повна-ж прямовісна сила, що діє на призму зрушення $ABC$ при „зведеній вантазі“ (фіг. 12), буде

$$G = \int \gamma \,.\, dF \,.\left(1 + \frac{2h_r \,.\, cs\delta}{h'}\right).1 = \gamma \left( \int dF + \int \frac{h_r \,.\, cs\delta}{\frac{1}{2} h'} \cdot \frac{ds}{ds} . dF \right).1\,;$$




Фіг. 12.

але $\frac{1}{2}\, h' \,.\, ds = dF$ і $h_r \,.\, cs\delta \,.\, ds$ є поверхня $dF'$ елементарної площинки $knrs$ „зведеної вантажної поверхні“; через те

$$G = 1 . \gamma . (\int dF + \int dF') = \gamma . (F + F').1 = \gamma . \text{ пов. } ABRR'CA \,.1. \tag{6}$$

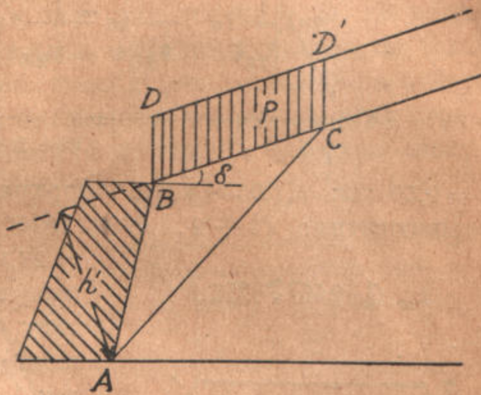
З виразу (6) виводимо, що **прямовісна сила, яка діє на призму $ABC$ зрушення при зведеній вантазі, дорівнює вазі земляної призми з основою $ABRR'CA$ та висотою, рівною одиниці** (у напрямові нормальному до площі рисунку). Через те, що в (6) входить чинник 1, вагу земляної призми $ABRR'CA$ (фіг. 12) можна написати просто $G = \gamma$. пов. $ABRR'CA$; отже, щоб мати прямовісну силу $G$, що діяла-б на призму $ABC$ зрушення при зведеній вантазі, досить обчислити пов. контура $ABRR'CA$ й помножити її на вагу одиниці об'єму землі. Якщо зовнішній контур землі простолінійний (фіг. 13) і вантага $p$ на одиницю довжини рівномірно-розподілена, то $h'$, $\delta$ та $p$ постійні; через це, застосовуючи формулу (4), матимемо прямовісну силу, що діє на призму $ABC$ зрушення в вигляді $G=\left(\gamma+\frac{2p}{h'}\right).1.\int dF=\left(\gamma+\frac{2p}{h'}\right)$. пов. $ABC.1=$

$=\left(\gamma+\frac{2p}{h'}\right)$. пов. $ABC=$

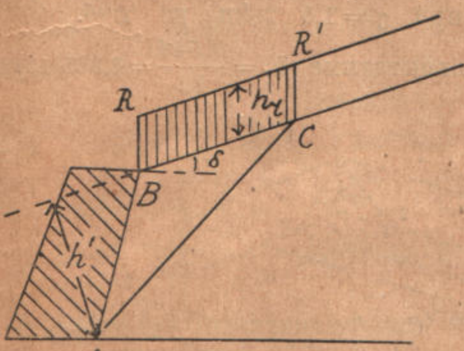
$=\gamma'$. пов. $ABC$. Якщо вантагу дано „зведеною до землі вантагою“ (фіг. 14), то згідно з (6) прямовісна сила, що діє на призму $ABC$ зрушення, буде

$G=\gamma$. пов. $ABRR'CA$.

Крім розподіленої вантаги на околичній поверхні землі можуть бути також скупчені вантаги, наприкл., тиски, що передаються на осі возового складу різних хур, котків і т. и. Така вантага звичайно зводиться до рівномірно-розподіленої. Візьмімо, напр. таку тимчасову вантагу скупченими вантагами в формі тиску від паротягу за нормою 1907 р. (фіг. 15); тут ми припускаємо, що тиск од паротягу передається під кутом в 30° до вертикали; так само й тиск од злежня передається під кутом у 30° до вертикали (фіг. 15 й 16); таким чином тиск од коліс паротягу передається в точки $1'$, $4'$ (фіг. 17) та $2'$, $3'$, а від злежня в точки $1''$, $2''$ та $4''$, $3''$; через це вся поверхня, на яку поширюється тиск, буде поверхня прямокутника $bcde$. Боки цього прямокутника, згідно з фіг. 15 та 16, будуть $ed=1'4'=(l+2.h.\mathrm{tg}30^0)$ і $eb=1''2''=a+2.h.\mathrm{tg}30^0$; отже поверхня, на яку передається тиск од паротягу, буде поверхня

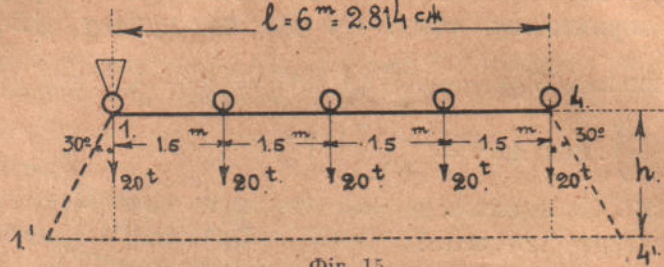



Фіг. 13.



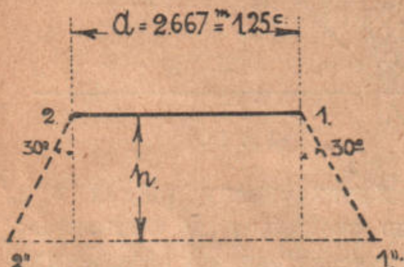

Фіг. 14.

$bcde = ed \,.\, eb = (l + 2 \,.\, h \,.\, \mathrm{tg}\, 30^0) \,.\, (a + 2 \,.\, h \,.\, \mathrm{tg}\, 30^0)$. Через те що віддаль між крайніми осями паротягу $l = 6$ метр. (2,81 саж.) і довжина злежня $a = 2{,}667$ метр. (1,25 саж.), то при насипу, напр. висотою

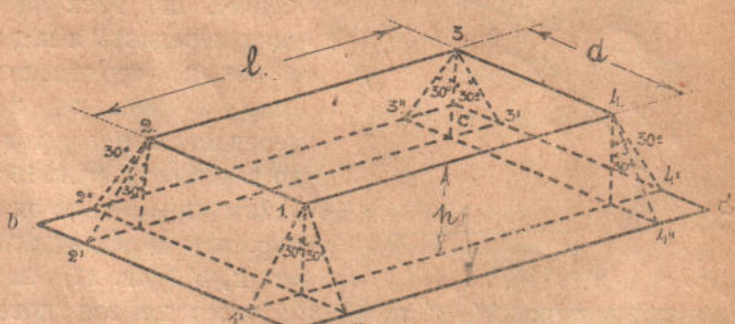



Фіг. 15.

$h = 0{,}50$ саж. $= 1{,}0668$ метр. поверхня передачі тиску від паротягу дорівнюватиме $(6 + 2 \,.\, 1{,}0668 \,.\, \mathrm{tg}30^0) \,.\, (2{,}667 + 2 \,.\, 1{,}0668 \,.\, \mathrm{tg}30^0) =$ $= 28{,}18$ кв. метр. (6,19 кв. саж.); при повному тискові на п'ять осей паротягу в 100 тонн (6105 пуд.) прямовісний тиск на один кв. метр поземої площі, на яку поширюється тиск, буде $q = \frac{100}{28{,}18} = 3{,}548$ тонн на кв. метр; отже висота зведеної до землі вантажної площі при $\gamma = 1{,}5$ тонн на куб. метр (900 пуд. на куб. саж.) дорівнюватиме $h_r = \frac{3{,}548}{1{,}5} = 2{,}365$ метр.




Фіг. 16.

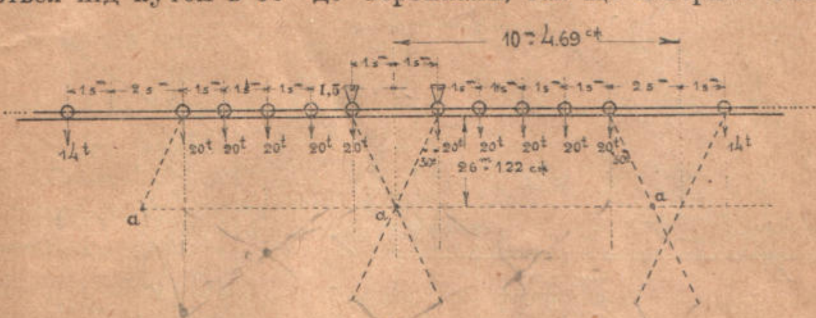



Фіг. 17.

(1,1 саж.); це є зведена висота від тимчасової вантаги паротягом. Повна-ж зведена висота при глибині насипу $h = 1{,}0668$ метр. (0,5 саж.)

та при товщині баласту на висоті злежня в 0,1067 метр. (0,05 саж.) дорівнюватиме $2{,}365 + 1{,}0668 + 0{,}1067 = 3{,}5385$ метрів (1,65 саж.).

Якщо ми розглянемо фіг. 18, то побачимо, що позема лінія поширення тиску від одного паротягу буде на глибині $h = 1{,}5 : \operatorname{tg} 30^0 = 2{,}6$ метр. (1,22 саж.); ця лінія є лінія $\overline{aa}$. Нижче за цю лінію вже передаються тиски тендерів та вагонів; таким чином обчисляти розмір зведеної вантаги від паротягу вищезазначеним способом можна тільки для насипів до 2,6 метр. (до 1,22 саж.); при більших висотах насипів припускають, що вага паротягу в 100 тонн розподілена по всій довжині (базі) паротягу завдовжки 10 метр. (4,69 саж.), прямовісно, а через злежень передається під кутом в $30^0$ до вертикали, так що поверхня тиску




Фіг. 18.

дорівнюватиме $10 . (2{,}667 + 2 . h . \operatorname{tg} 30^0)$ кв. метр.; тоді зведена до землі висота від тимчасової вантаги паротягом дорівнюватиме

$$h_r = \frac{100}{10 . (2{,}667 + 2 . h . \operatorname{tg} 30^0) . \gamma} \text{ метр.,}$$

де $\gamma$ показано в тоннах на куб. метр. Напр., при висоті насипу $h = 7{,}51$ метр. (3,52 саж.) висота зведеної тимчасової вантаги паротягом буде

$$h_r = 0{,}699 \text{ метр. (0,27 саж.).}$$

## § 5. Графічне визначення площі зрушення (ковзання) спробами при плоскій стінці і довільному околичньому контурі землі.

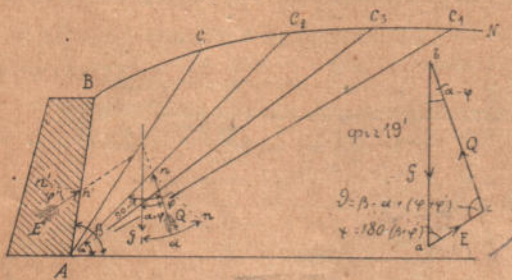
(Спосіб Кульмана та Pillet).

Припустімо, що ми маємо площу зрушення $AC_2$ (фіг. 19); тоді вага $G$ призми $ABC_2$ зрушення урівноважується з силами $E$ та $Q$ (фіг. 19'), що утворюють з нормалями $n'n'$ та $nn$ до площ ковзання $AB$ та $AC_2$ кути тертя $\varphi'$ та $\varphi$; ця призма $ABC_2$

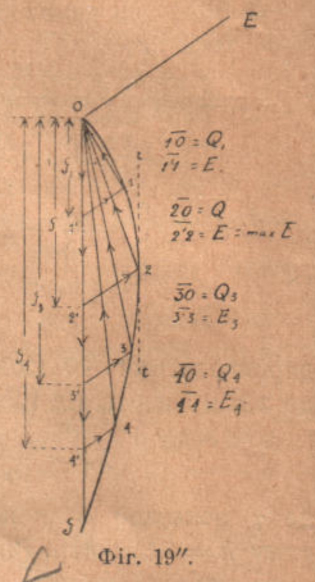
перебуває в стані граничної рівноваги. З силового трикутника $abc$ (фіг. 19′) маємо, що $E : G = \mathrm{sn}(\alpha - \varphi) : \mathrm{sn}[\beta - \alpha + (\varphi + \varphi')]$; звідси тиск землі на стінку $AB$ буде

$$E = G \cdot \frac{(\mathrm{sn}\alpha - \varphi)}{\mathrm{sn}[\beta - \alpha + (\varphi + \varphi')]} . \qquad (7)$$

Через те, що кут $\varepsilon$, який утворюється силою $Q$ з напрямом нормали до площі, на якій вона діє, дорівнюватиме кутові тертя $\varphi$ тільки для площі зрушення $AC_2$, то для всяких инших площ $AC_1$, $AC_3$, $AC_4$ (фіг. 19), проведених через нижню точку $A$ стінки, цей кут $\varepsilon$ буде менший за кут $\varphi$. Всі ці призми $ABC_1$, $ABC_3$, $ABC_4$, що в них відповідна сила $Q$ утворює з

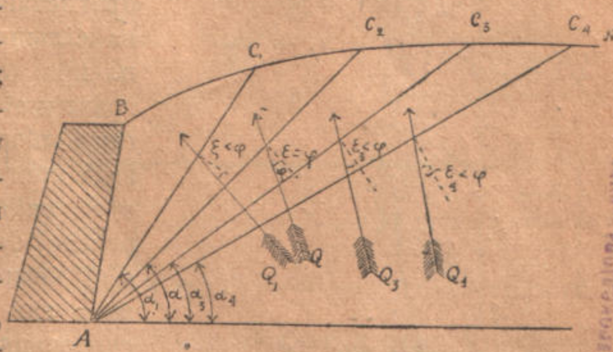



Фіг. 19.




Фіг. 19″.

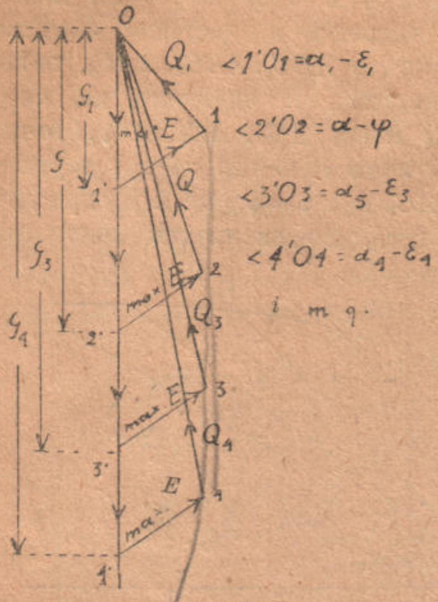
нормалями до цих площ кут $\varepsilon$, менший за кут тертя $\varphi$, згідно з § 3 перебувають безумовно в рівновазі (тільки не в граничній, коли $\varepsilon = \varphi$). Якщо ми тепер збудуємо силові многокутники для призм $ABC_1$, $ABC_3$, $ABC_4$, то-що (фіг. 19″), то матимем відповідні величини тисків землі $E_1 = 1'\,1$, $E_3 = 3'\,3$, $E_4 = 4'\,4$, то-що; з'єднавши кінці 1, 3, 4 та инших відтинків, що являють собою $E_1$, $E_3$, $E_4$, то-що, матимем якусь криву 0 1 3 4 ....., що являтиме собою закон відміни тиску землі $E$; ця крива віднесена до координатних осів $G$ та $E$, причому абсцисами будуть значіння ваги $G$ призм, а ординатами відповідні тиски $E$ землі. На цю криву 0 1 3 4... вказав проф. Кульман, через що вона й зветься $E$-Кульмановою кривою. Коли дотична $tt$, яка є рівнобіжна з віссю $G$, дотикається до кривої 0 1 3 4...... в точці 2, то ордината $E = 2'\,2$ буде найбільша. Цьому max. $E$ тиску землі відповідає напрям сили $Q = \overline{20}$; через те відповідну площу, що проходитиме через точку $A$, на яку діє сила $Q = \overline{20}$, матимем, якщо проведемо просту $AC_2$ під кутом $90 - \varphi$ (фіг. 19) до напряму $\overline{20}$ сили $Q$. Ця площа $AC_2$ й буде справжня площа зрушення. Справді, якщо ми, зберегаючи постійне значіння $E = 2'2 = \max.\, E$, збудуємо для призм $ABC_1, ABC_3, ABC_4$, то-що, відповідні величини сил $Q$ (фіг. 20′), то знайдемо, що сили $Q$ ($Q_1, Q_3, Q_4$, то-що) для цих площ $AC_1, AC_3, AC_4$, то-що, утворюють з нормалями до них кути $\varepsilon$, менші за кут тертя $\varphi$; отже тільки для однієї площі $AC_2$ кут $\varepsilon = \varphi$; це й є справжня площа зрушення. Цей спосіб графічно визначати положення площі зрушення зазначив крім Кульмана ще й Pillet; через те він має також назву способу Pillet. Отже, визначаючи за способом Кульмана—Pillet положення площі зрушення, знаходимо, що для площі зрушення, або, що те саме, для призми зрушення тиск землі $E$ є maximum, себ-то $E = \max.\, E$; через те згідно з (7) при $\varepsilon = \varphi$ маємо, що



Фіг. 20.

$$\max.\, E = G \cdot \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{sn}[\beta - \alpha + (\varphi + \varphi')]}, \tag{8}$$

де кут $\alpha$ є кут площі зрушення з поземом. Що max. $E$ буває тільки для площі зрушення $AC_2$, бачимо з нижче наведених міркуваннів. Для всіх призм з площами $AC_1$ (фіг. 20) вага $G_1$ менша за вагу $G$ призми $ABC_2$ зрушення й кут $\alpha_1 > \alpha$. З силових трикутників (фіг. 20′) видко, що для всіх таких призм можна прикласти нерівність $\alpha_1 - \varepsilon_1 > \alpha - \varphi$; але через те, що $\alpha_1 > \alpha$, ця нерівність цілком збережеться, якщо $\varepsilon_1 < \varphi$. Для всіх призм з площами $AC_3, AC_4$, то-що, значіння ваги $G_3, G_4$, то-що, більші за вагу $G$ призми $ABC_2$ зрушення і кут $\alpha_3 < \alpha$, $\alpha_4 < \alpha$, то-що. З силових трикутників (фіг. 20′) видко, що для цих призм мають місце нерівності $\alpha_3 - \varepsilon_3 < \alpha - \varphi, \alpha_4 - \varepsilon_4 < \alpha - \varphi$, то-що; але що $\alpha_3 < \alpha, \alpha_4 < \alpha$ й т. д., то ці нерівності цілком збережуться, коли $\varepsilon_3 < \varphi, \varepsilon_4 < \varphi$, то-що. Отже для всіх площ $AC_1$, $AC_3$, $AC_4$, то-що, одмінних од площі $AC_2$, відповідні сили $Q$ утворюють з нормалями до площі їх діяння кути $\varepsilon$, менші за кут $\varphi$; значить, площа $AC_2$ буде справжня площа зрушення, й для неї кут сили $Q$ з нормаллю до цієї площі дорівнює $\varphi$. Отже тільки для площі зрушення $AC_2$ (фіг. 20) буває max. $E$; значить, призмі зрушення $ABC_2$ треба протиставити з боку стінки найбільший опір для того, щоб ця призма перебувала в стані граничної рівноваги. Тим-то сам Coulomb у своєму творі назвав призму зрушення „призмою найбільшого тиску“ (le prisme de plus grande poussée); безперечно, Coulomb назвав так цю призму за-для скорочення, бо по суті в теорії Coulomb'а мова йде не за призму, яка найбільше тисне на стінку, а за призму, що вимагає для своєї рівноваги як-найбільшого опору з боку стінки.

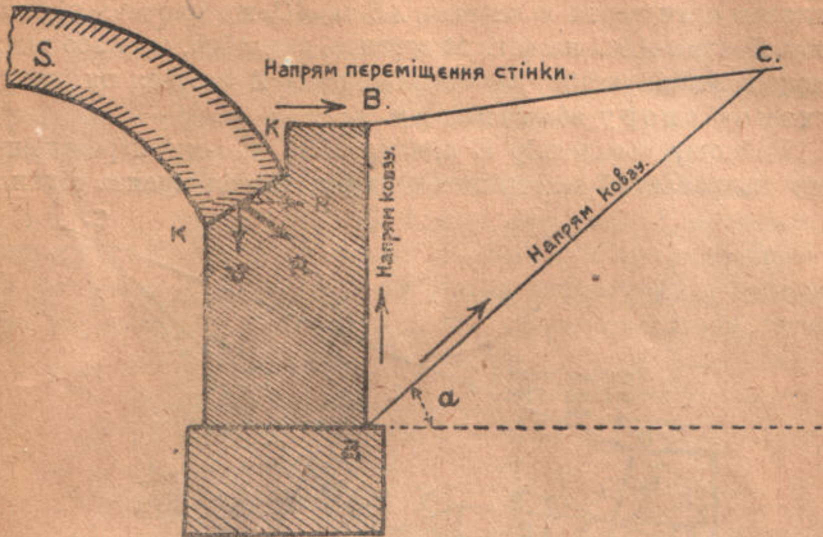



Фіг. 20'.

## § 6. Розпір та відпір землі.

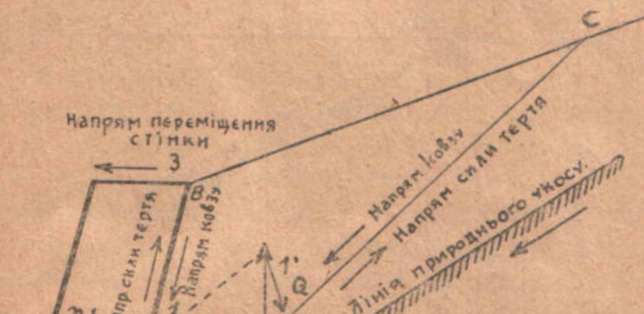
Через те, що земля, що міститься з заднього боку $AB$ підпірної стінки (фіг. 5), тисне на стінку похилою силою $E$, намагаючися зрушити її або звалити, то тиск землі $E$ можна прирівняти до розпору в склепінні; тому тиск землі $E$ на стінку зветься також р о з п о р о м з е м л і. Тиск $E$ землі на призму $ABC$ зрушення, яка намагається ковзатися униз, є тиск, що діє на стінку, тому він і зветься також а к т и в н и м т и с к о м землі (activer Erddruck, poussé active, poussée des terres). Ці терміни: т и с к з е м л і на стінку (Erddruck, poussée des terres), р о з п і р з е м л і й а к т и в н и й т и с к землі — рівнозначні. Але на підпірну стінку $AB$ крім тиску насипаної позад неї землі може бути також тиск зовні, напр. тиск $R$ (фіг. 21), що передається від склепіння $S$ через його п'яту $kk$. Підо впливом такого тиску $R$

стінка $AB$ може посунутись, хоч і дуже мало, вправо, як це зазначено стрілкою на фіг. 21; в наслідок цього маса землі




Фіг. 21.

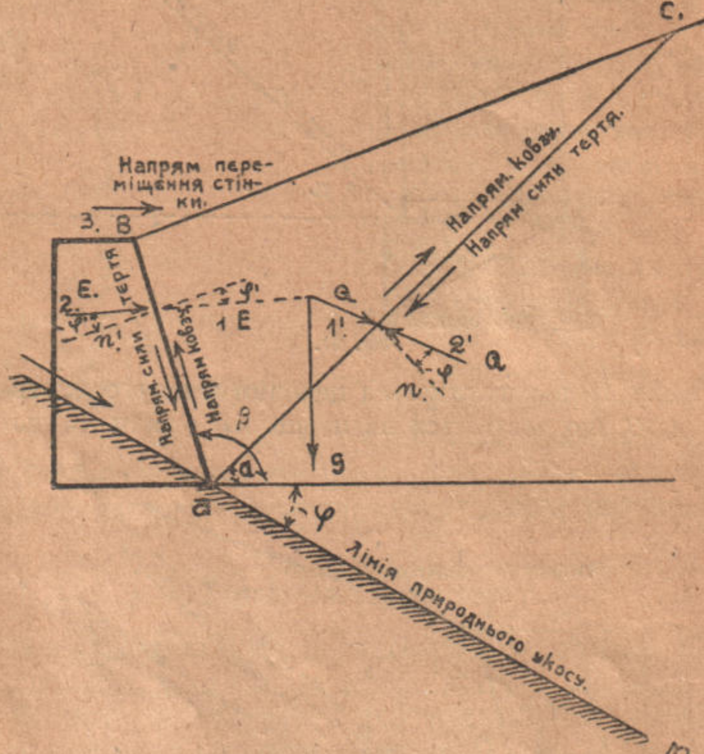
позад стінки $AB$ намагатиметься переміститися вгору, утворюючи призму $ABC$, що ковзається на площі $AB$ стінки та по площі




Фіг. 22. Розпір землі.

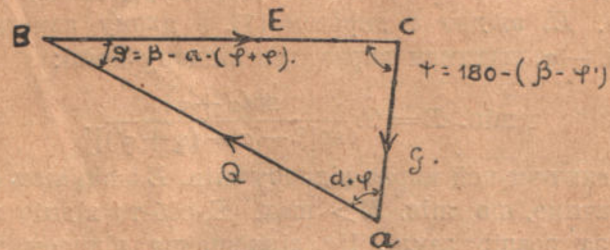
$AC$ зрушення; сила тертя в площах $AB$ та $AC$ в цьому випадкові буде направлена згори додолу (фіг. 23), себ-то саме в протилежний бік проти того, що буває при активному тискові на стінку (фіг. 22), де призма $ABC$ зрушення, ковзаючись униз, викликає сили тертя в площах $AB$ та $AC$, що направлені знизу вгору. Призма $ABC$ на фіг. 23 ставить, звичайно, опір або відпір своєму ковзанню вгору (випиранню); тому й зветься ця призма призмою опору або відпору.

Цей опір або відпір $E$ призми $ABC$ своєму переміщенню вгору направлений за стрілкою 1 на фіг. 23; він мусить відхиля-




Фіг. 23. Відпір землі.

тися від нормали $n'$ площі $AB$ вниз на кут $\varphi'$ (в граничній рівновазі призми $ABC$), бо тільки при такім напрямові він дає складову в площі $AB$, що йде згори додолу, себ-то проти ковзання призми $ABC$. Але, якщо через тиск зокола на стінку з'являється опір $E$ земляної призми $ABC$, то з свого боку стінка $AB$ тисне на земляну призму $ABC$ з силою, що дорівнює відпорові $E$ і направлена в противний бік, як це зазначено на фіг. 23 стрілкою 2. Ця сила $E$ тиску стінки $AB$ на призму $ABC$, що направлена за стрілкою 2, є сила дійова; вона тисне на призму $ABC$, припираючи її до площі $AC$, що й собі робить на призму опору $ABC$ протитиснення або реакцію $Q$ за стрілкою 2′; таким чином сила $E$, що йде за стрілкою 1, зрівноважується вагою $G$ самої призми $ABC$ й реакцією $Q$ площі $AC$, себ-то призма $ABC$ перебуває в рівновазі, коли на неї діють 3 сили: сила $E$ за стрілкою 1, сила $G$ ваги призми й реакція $Q$ площі $AC$. На фіг. 23а зазначено замкнений силовий трикутник $abc$ цих трьох сил. Реакція $Q$ площі $AC$, що йде за стрілкою 2′, мусить одхилятися від нормали $n$ до площі $AC$ вниз на кут $\varphi$ (при граничній рівновазі призми $ABC$), бо тільки при такому її напрямові вона дає складову в площі $AC$, що направлена згори додолу,




Фіг. 23а.

себ-то проти ковзання призми $ABC$. Опір $E$ призми відпору $ABC$ своєму ковзанню вгору, направлений за стрілкою 1 (фіг. 23), буде пасивним діянням землі на стінку; тому цей опір $E$ зветься пасивним тиском землі; він зветься також просто відпором землі (passiver Erddruck, pression passive або butée des terres). А тиск $E$ стінки на призму $ABC$, що йде за стрілкою 2, рівний і противно-направлений до відпору $E$, що йде за стрілкою 1, відхилятиметься від нормали $n'$ до площі $AB$ вгору на кут $\varphi'$. Таким чином, порівнюючи фіг. 22 й 23 розпору й відпору землі, ми бачимо, що при розпорі тиск землі $E$ й реакція $Q$ скеровані на відповідні нормалі $n'$ та $n$ до площ $AB$ й $AC$ під кутами $\varphi'$ й $\varphi$, а при відпорі землі тиск $E$ стінки на призму $ABC$ й реакція $Q$ скеровані до нормалів $n'$ та $n$ під кутами $-\varphi'$ й $-\varphi$; отже в трикутникові сил $abc$ (фіг. 23а) кути між $Q$, $G$ та $E$ будуть: $\angle(Q,G) = \alpha + \varphi$, $\angle(E,G) = \psi = 180^0 - (\beta - \varphi')$ і $\angle(E,Q) = \beta - \alpha - (\varphi + \varphi')$. Через те всі висновки, що ми давали звідалі для розпору, можна прикласти й до відпору землі, треба тільки замінити кути $\varphi'$ й $\varphi$ на $-\varphi'$ й $-\varphi$.

Тиск зовні на стінку (фіг. 21) можна уявити собі, як тиск певної важкої маси землі на площу $AB$, що лежить ліворуч од стінки й спускається похилою площею $AN$ (фіг. 23) в напрямові до призми $ABC$ відпору; отже кут, що його утворює площа $AN$ природнього укосу з поземом, треба відкласти вниз од поземої лінії, себ-то він буде $-\varphi$; тимчасом, коли при розпорі землі (фіг. 22), де йде рух земляної маси справа наліво, кут лінії $AN$ природнього укосу утворює з поземом кут $+\varphi$. Через те, що призма відпору, перебуваючи в граничній рівновазі (хиткій, себ-то тільки що не ковзається вгору), ставить **найменший** опір посуванню вгору проти всіх инших призм, у яких тиски $Q$ утворюють з нормалями до відповідних площ $AC$ (порівн. фіг. 20), кути є менші за кут $\varphi$, то відпір $E$ землі буде найменший, себ-то буде min. $E$; згідно з виразом (7), в якому замінюємо $\varphi'$ й $\varphi$ на $-\varphi'$ й $-\varphi$, матимем вираз для відпору землі:

$$\text{min. } E = G . \frac{\text{sn}(\alpha+\varphi)}{\text{sn}[\beta-\alpha-(\varphi+\varphi')]} . \qquad (9)$$

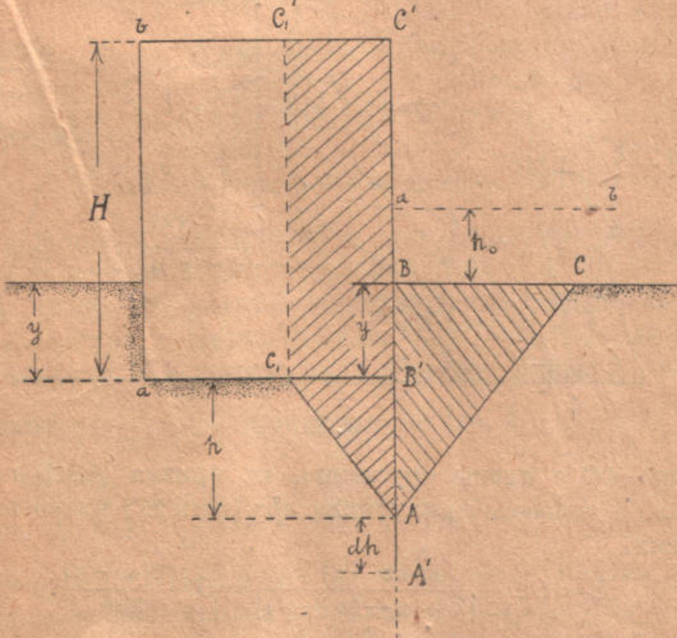
Порівнюючи цей вираз відпору min. $E$ з виразом (8) розпору max. $E$, бачимо, що min. $E >$ max. $E$, себ-то відпір землі буде більший за розпір землі. Це відношення відпору до розпору землі можна написати в такій формі:

$$\frac{\text{min. } E}{\text{max. } E} = n, \qquad (10)$$

де $n$ є число більше за одиницю; у деяких випадках відпір землі переважає розпір землі в декілька разів.

Відпір землі не має особливого практичного значіння в питанні про те, як запобігти боковим переміщенням підпір будови (напр. підпори $AB$ склепіння на фіг. 21), бо раніше, як виявиться відпір землі, підпора будови (стінка $AB$ на фіг. 21) матиме певне переміщення (на фіг. 21 в напрямові стрілки); а таке переміщення підпори будови може викликати небезпечні деформації для самої будови, напр. розколини в склепінні на фіг. 21; таким чином, раніше ніж виявиться корисна дія відпору, будова буде пошкоджена. Через те в таких випадках, як на фіг. 21, вираховують підпору склепіння (стінку $AB$), що підлягає силі тиску землі тільки з одного боку, себ-то розраховують тільки на розпір землі.

Але відпір землі має велике значіння в тих випадках, де треба протидіяти осіданню земляних мас, що буває в наслідок сповзання їх од навантаження вміщеної на них будови; такому сповзанню й чинить опір відпір землі. Це має місце переважно в основах фундаментів і обумовлює глибину їх закладки. Припустімо, що на фіг. 24 прямокутник $A'B'C'D'$ являє собою стовп ґрунту заввишки з $H$ і замінює навантаження даної будови на основу $A'B'$ ґрунту; і нехай глибина закладки будови є $BB' = y$, причому цю глибину беруть нижче за лінію $ab$, що вміщена на даній висоті $h_0$ (напр. нижче за лінію розмиву ґрунту при мо-

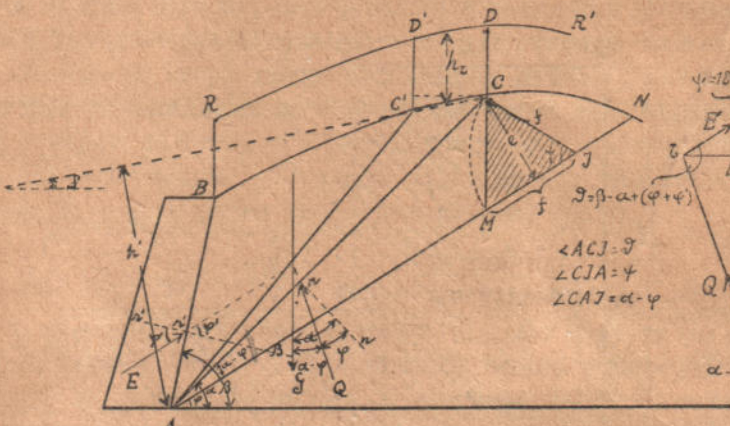



Фіг. 24.

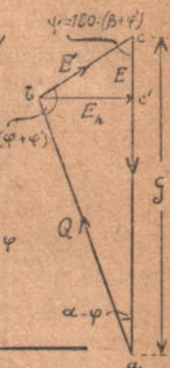
стових та гідротехнічних спорудженнях). Якщо розмиву ґрунту не чекають, то $h_0 = O$; у цьому випадкові глибина $BB'$ закладки дорівнюватиме або буде більша за глибину промерзання ґрунту. Якщо площа зрушення для будови буде площа $AC_1$, а $AC$ — площа зрушення для ґрунту справа, то призма $AC_1\,C'_1\,C'\,A$ буде призмою зрушення, а призма $ABC$ буде призмою відпору. Для того, щоб під тиском будови не відбувалося витиснення ґрунту по лінії $AC$, разом з осіданням ґрунту під сподом $A'B'$ основи будови, треба, щоб розпір землі max. $E$ для призми зрушення $AC_1C'_1CA$ був менший за відпір землі min. $E$ для призми відпору $ABC$. Таким чином тут відпір землі виявляє своє корисне діяння.

## § 7. Плоска стінка й довільна (криволінійна) поверхня землі. Положення площі зрушення. Величина тиску землі (розпір).

Припустімо, що нам дано плоску стінку $AB$ (фіг. 25) й криволінійну поверхню $BN$ землі; на цій поверхні розміщено розподілену вантагу, зведену до землі, вантажна лінія якої є крива $RR'$; величина цієї зведеної вантаги в якійсь точці поверхні землі




Фіг. 25.




Фіг. 25′.

є $h_r$. Якщо $AC$ є площа зрушення, то призма $ABC$ є призма зрушення. З силового трикутника $abc$ (фіг. 25′) маємо величину тиску землі

$$E = G \cdot \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{sn}[\beta - \alpha + (\varphi + \varphi')]} = G \cdot \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{sn}\vartheta}.$$

Через те, що тиск землі $E$ залежить од кута $\alpha$ і для призми зрушення він найбільший, то ми маємо умову, що $\frac{dE}{d\alpha} = 0$; отже ми дістаємо, що

$$G \cdot \frac{\operatorname{sn}\vartheta \cdot \operatorname{cs}(\alpha - \varphi) - \operatorname{sn}(\alpha - \varphi) \cdot \operatorname{cs}\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha}}{\operatorname{sn}^2\vartheta} + \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{sn}\vartheta} \cdot \frac{dG}{d\alpha} = 0$$

або

$$G \cdot \left[ \operatorname{sn}\vartheta \cdot \operatorname{cs}(\alpha - \varphi) - \operatorname{sn}(\alpha - \varphi) \cdot \operatorname{cs}\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} \right] + \operatorname{sn}\vartheta \cdot \operatorname{sn}(\alpha - \varphi) \cdot \frac{dG}{d\alpha} = 0;$$

але $\vartheta = \beta - \alpha + (\varphi + \varphi')$, отже,

$$\frac{d\vartheta}{d\alpha} = -1,$$

$b = 45^\circ - \frac{\varphi}{2})$

$E_{max} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \, tg^2 (45^\circ - \frac{\varphi}{2})$

а тому

$$G.\left[\operatorname{sn}\vartheta\,.\,\operatorname{cs}(\alpha-\varphi)+\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)\,.\,\operatorname{cs}\vartheta\right]+\operatorname{sn}\vartheta\,.\,\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)\,.\,\frac{dG}{d\alpha}=0,$$

або

$$G\,.\operatorname{sn}(\vartheta+\alpha-\varphi)+\operatorname{sn}\vartheta\,.\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)\,.\,\frac{dG}{d\alpha}=0\,;$$

але через те, що

$$\vartheta=180^0-[\psi+(\alpha-\varphi)]$$

і значить

$$\vartheta+\alpha-\varphi=180^0-\psi,$$

то

$$\operatorname{sn}\vartheta=\operatorname{sn}(\alpha-\varphi+\psi)$$

і

$$\operatorname{sn}(\vartheta+\alpha-\varphi)=\operatorname{sn}\psi;$$

тому дістаємо, що

$$G.\operatorname{sn}\psi+\frac{dG}{d\alpha}.\operatorname{sn}(\alpha-\varphi+\psi)\,.\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)=0.$$

У цьому рівнянні величина $dG$ є вага безконечно-малої призми $ACDD'C'A$, в якій безконечно-малий кут $CAC'$ є $d\alpha$; инакше кажучи, площа $AC'$ взята безконечно близько до площі $AC$ зрушення. З фігури 25 видко, що вага $G$ земляної призми $ACDRBA$ зменшується із збільшенням кута $\alpha$ нахилу площі $AC$ до позему; а тому похідна $\frac{dG}{d\alpha}$ буде величина від'ємна, й попереднє рівняння матиме вигляд:

$$G\,.\operatorname{sn}\psi-\frac{dG}{d\alpha}.\operatorname{sn}(\alpha-\varphi+\psi)\,.\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)=0. \tag{11}$$

Згідно з формулою (5) § 4 вага $dG$ елементарної призми $ACDD'C'A$ (вага елементарної земляної призми $ACC'$ самого насипу й вага земляної елементарної призми $CDD'C'$ од зведеної до землі розподіленої вантаги) буде:

$$dG=\triangle\,ACC'\,.\gamma.\left(1+\frac{2h_r\,.\operatorname{cs}\delta}{h'}\right);$$

але через те, що поверхня $\triangle\,ACC'=\frac{1}{2}.\overline{AC}^2\,.d\alpha$ (як поверхня безконечно малого сектора), то

$$dG=\frac{1}{2}.\overline{AC}^2.\,d\alpha\,.\,\gamma.\left(1+\frac{2h_r\,.\operatorname{cs}\delta}{h'}\right),$$

звідки

$$\frac{dG}{d\alpha}=\frac{1}{2}.\overline{AC}^2.\gamma\,.\left(1+\frac{2h_r\,.\operatorname{cs}\delta}{h'}\right). \tag{12}$$

Проведімо тепер з точки $C$ просту $CJ$ під кутом $\psi = 180^0 - (\beta + \varphi')$ до напряму $AN$ природнього укосу; тоді матимемо $\triangle ACJ$, де $\angle CJA = \psi$, $\angle JAC = \alpha - \varphi$, і значить $\angle ACJ = 180^0 - (\psi + \alpha - \varphi) = \beta - \alpha + (\varphi + \varphi') = \vartheta$; таким чином ми дістали $\triangle ACJ$ подібний до силового трикутника $abc$ (фіг. 25′). Звичайно, мірило сили $G$ в силовому трикутникові $abc$ можна вибрати так, що $G = \overline{ac} = \overline{AJ}$; і тоді трикутник $ACJ$ й силовий трикутник $abc$ будуть рівні. Проста $CJ$ зветься базою або основою; хай довжина цієї бази буде $f$, а висота трикутника $ACJ$ хай буде $e$. З трикутника $ACJ$ маємо, що $AC = \overline{AJ} \cdot \frac{\mathrm{sn}\psi}{\mathrm{sn}\vartheta}$ і $AC = \frac{e}{\mathrm{sn}\,(\alpha - \varphi)}$. Ставлючи ці значіння $AC$ в (12), матимемо:

$$\frac{dG}{d\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AJ} \cdot \frac{\mathrm{sn}\psi}{\mathrm{sn}\vartheta} \cdot \frac{e}{\mathrm{sn}(\alpha - \varphi)} \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AJ} \cdot \frac{\mathrm{sn}\psi}{\mathrm{sn}[180^0 - (\psi + \alpha - \varphi)]} \cdot \frac{e}{\mathrm{sn}(\alpha - \varphi)} \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AJ} \cdot \frac{\mathrm{sn}\psi}{\mathrm{sn}(\psi + \alpha - \varphi)} \cdot \frac{e}{\mathrm{sn}(\alpha - \varphi)} \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right);$$

ставлячи цей вираз $\frac{dG}{d\alpha}$ в рівняння (11), знайдемо:

$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{AJ} \cdot e \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right). \qquad (13)$$

Через те, що $\frac{1}{2}\,\overline{AJ} \cdot e$ є поверхня $\triangle ACJ$, вага $G$ призми $ACDRBA$ буде

$$G = \triangle ACJ \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right). \qquad (14)$$

Якщо пов. основи $ACDRBA$ земляної призми є $F$, то вага її $G = F \cdot 1 \cdot \gamma = F \cdot \gamma$; тут довжина 1 являє собою висоту земляної призми в напрямові нормальному до площі рисунку, себ-то одиницю довжини стінки. Ставлячи цей вираз ваги $G$ у залежність (14), знаходимо, що

$$F = \triangle ACJ \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right). \qquad (14')$$

Ця залежність і становить нам геометричну ознаку того, що площа $AC$ є справжня площа зрушення (сковзання); отже, треба підібрати положення площі $AC$ так, щоб ця залежність $(14')$ справджувалася. Таким чином, ми повинні керуватися залежністю $(14')$, щоб визначити положення площі зрушення.

Якщо розподілена вантага дається нам як вантага $p$ на одиницю поверхні $BN$ (фіг. 25) землі, то за § 4 „зведена до землі висота“ буде $h_r = \frac{p}{\gamma . cs\delta}$; отже залежність (14) матиме вигляд:

$$G = \triangle ACJ . \left(\gamma + \frac{2 . p}{h'}\right); \tag{15}$$

беручи $\gamma + \frac{2 . p}{h'} = \gamma'$, цю залежність (15) можна написати в такій формі:

$$G = \gamma' . \triangle ACJ . \tag{15'}$$

Так само залежність $(14')$ набере вигляду:

$$F = \triangle ACJ . \left(1 + \frac{2 . p}{\gamma . h'}\right). \tag{15''}$$

Якщо поверхня землі не буде навантажена, то $h_r = 0$; у цьому випадкові поверхня $ACDRBA$ заміниться на поверхню $ACB$ основи призми зрушення, і вага $G$ буде вагою призми $ACB$; тоді з залежностів (14) та $(14')$ знайдемо, що $G = \gamma . \triangle ACJ$... (16) і поверхня $\triangle ABC =$ пов. $\triangle ACJ$ ... (17).

Із залежности (17) видно, що **коли нема вантаги, то площа $AC$ зрушення ділить нарівно поверхню, що обмежена лініями стінки, землі, бази й природнього укосу.** Цю тезу вивів французький інженер Poncelet (Понслé). Згодом Ребган (Rebhann) довів це для довільного обрису заднього боку стінки (у формі ламаної лінії) та для довільної поверхні землі; через це висловлене положення також має назву 1-ої теореми Ребгана-Понслé.

Коли вантаги нема, то $p = 0$; тоді з (15) та $(15'')$ матимем ті самі формули (16) та (17).

З силового трикутника $abc$ (фіг. $25'$) маємо

$$E = G \frac{sn(\alpha - \varphi)}{sn\vartheta};$$

але з трикутника $ACJ$ маємо, що

$$\frac{sn(\alpha - \varphi)}{sn\vartheta} = \frac{CJ}{AJ} = \frac{f}{AJ};$$

значить

$$E = G . \frac{f}{AJ};$$

підставляючи в цей вираз $E$ величину $G$ з (14), матимем

$$E = \triangle ACJ \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2h_r \cdot cs\delta}{h'}\right) \cdot \frac{f}{AJ};$$

але поверхня $\triangle ACJ = \frac{1}{2} \cdot \overline{AJ} \cdot e$, отже

$$E = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot cs\delta}{h'}\right). \tag{18}$$

Цей вираз (18) і являє собою величину тиску землі на стінку, якщо ця стінка плоска, а поверхня землі криволінійна й навантажена розподіленою вантагою.

Відкладімо від точки $J$ (фіг. 25) на лінії $AJ$ відтинок $JM = CJ = f$ і з'єднаймо точку $M$ з точкою $C$; тоді матимем $\triangle CJM$ з основою $JM = f$ і висотою $e$; через те, що поверхня цього трикутника $CJM = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e$, тиск землі на стінку, згідно з (18), можна записати так:

$$E = \triangle CJM \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot cs\delta}{h'}\right). \tag{19}$$

З цього виразу бачимо, що тиск землі на стінку пропорціональний вазі трикутної земляної призми з основою в формі трикутника $CJM$, або, що те саме, пропорціональний поверхні трикутника $CJM$; щоб дістати цей тиск $E$ землі на стінку, треба поверхню трикутника $CJM$ помножити на $\gamma \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot cs\delta}{h'}\right)$; тому цей трикутник $CJM$, як міра тиску землі на стінку, зветься т р и к у т н и к т и с к у. За § 4 величина $\gamma \cdot \left(1 + \frac{2h_r \cdot cs\delta}{h'}\right) = \gamma + \frac{2 \cdot p}{h'} = \gamma'$, тому тиск землі на стінку за (18) та (19) можна написати в такому вигляді:

$$E = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \left(\gamma + \frac{2 \cdot p}{h'}\right) \ldots (20) \text{ та } E = \triangle CJM \left(\gamma + \frac{2 \cdot p}{h'}\right) \tag{20'}$$

або

$$E = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma' \ldots\ldots (21) \text{ та } E = \gamma' \cdot \triangle CJM. \tag{21'}$$

Якщо поверхня землі не навантажена, то $h_r = 0$ й $p = 0$; значить, тиск землі буде:

$$E = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma \qquad (22)$$

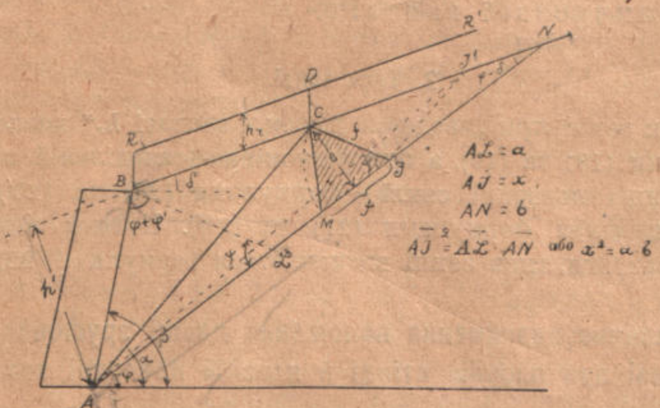
або

$$E = \gamma \cdot \triangle CJM. \qquad (23).$$

## § 8. Плоска стінка й плоска поверхня землі (фіг. 26).

### 1. Положення площі зрушення.

У даному випадкові кут $\delta$ й довжина $h'$ нормали з точки $A$ на напрям $BN$ є величини постійні. Поверхня земляної призми $ABRDOA$ дорівнює:




Фіг. 26.

$$F = \triangle ABC + h_r \cdot \overline{BC} \cdot \mathrm{cs}\delta = \triangle ABC \left(1 + \frac{h_r \cdot \overline{BC} \cdot \mathrm{cs}\delta}{\triangle ABC}\right);$$

але

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h',$$

а тому

$$F = \triangle ABC \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right);$$

але, згідно з (14′), ця поверхня $F = \triangle ACJ \cdot \left(1 + \frac{2\, h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right)$,

отже

$$\triangle ABC \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \mathrm{cs}\delta}{h'}\right) = \triangle ACJ \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r\, \mathrm{cs}\delta}{h'}\right); \qquad (24)$$

звідси ми матимемо, що

$$\triangle ABC = \triangle ACJ. \qquad (25)$$

Ця залежність теж являє собою 1-шу теорему Понслє-Ребгана для плоскої стінки й плоскої поверхні землі; вона дає нам геометричну ознаку того, що площа $AC$ є справжня площа зрушення; отже треба підібрати положення площі $AC$ так, щоб ця формула справджувалась.

Якщо поверхня землі не навантажена, то $h_r = 0$, і з рівности (24) ми знову матимем, що $\triangle ABC = \triangle ACJ$. Через те, що рівність поверхнів $\triangle ABC$ й $\triangle ACJ$ матиме місце і тоді коли є, і коли нема вантаги (при $h_r$ і при $h_r = 0$, себ-то при всякій величині вантаги), то робимо ми звідси висновок, що **при плоскій стінці й плоскій поверхні землі положення площі $AC$ зрушення не залежить од величини тимчасової вантаги.**

### 2. Тиск землі.

Тиск землі при „зведеній до землі вантазі $h_r$" визначається формулами (18) та (19), а при рівномірно-розподіленій вантазі $p$ на одиницю поверхні землі — формулами (20) та (20′); або-ж в обох випадках формулами (21) та (21′). Коли-ж немає тимчасової вантаги, тиск землі визначається формулами (22) та (23).

## § 9. Графічне визначення положення площі зрушення й тиску землі при плоскій стінці й плоскій поверхні землі.

Виведімо ще одну геометричну залежність, що служить для збудування положення площі зрушення. Проведімо з точки $B$ (фіг. 26) просту $BL$, рівнобіжну з базою $CJ$ до перетину її в точці $L$ з лінією $AN$ природнього укосу; ця проста $BL$, як видно з фіг. 26, утворюватиме з напрямом $AB$ стінки кут $\angle ABL = 180^0 - [\psi + (\beta - \varphi)] = 180^0 - [180^0 - (\beta + \varphi') + (\beta - \varphi)] = \beta + \varphi' - \beta + \varphi = \varphi + \varphi'$. З фіг. 26 видно, що, визначивши положення точки $J$ на простій $AN$ природнього укосу, ми визначаємо й положення точки $C$, а значить і площі $AC$ зрушення: треба тільки з точки $J$ провести просту $JC$, рівнобіжну з простою $BL$, що утворює кут $\varphi + \varphi'$ з стінкою $AB$. Таким чином, положення площі $AC$ зрушення визначається по простій $BL$; тому ця проста $BL$ має назву **напрямної** або **орієнтовної лінії** (die Stellungslinie, directrice). Проведімо тепер з точки $J$ просту $JJ'$ рівнобіжну з $AC$ до перетину її в точці $J'$ з лінією $BN$ землі; тоді матимемо подібні трикутники $ACN$ та

$JJ'N$ і подібні трикутники $BNL$ та $CNJ$. З'єднавши точку $A$ з $J'$, матимем трикутника $ACJ'$. Через те, що $JJ' \parallel AC$, то трикутники $ACJ'$ й $ACJ$ при спільній основі $AC$ мають рівні висоти; значить поверхня $\triangle ACJ$ дорівнює поверхні $\triangle ACJ'$; але за 1-ою теоремою Понсле-Ребгана $\triangle ABC = \triangle ACJ$ (див. формулу (25)), а тому $\triangle ABC = \triangle ACJ'$; ці два рівні один одному трикутники $ABC$ й $ACJ'$, маючи спільну висоту $h'$ (фіг. 26), мають також рівні основи $BC$ та $CJ'$, себ-то $BC = CJ'$. З подібности трикутників $ACN$ та $JJ'N$ ми маємо залежність $CJ' : CN = AJ : AN$ або через те, що $BC = CJ'$, залежність $BC : CN = AJ : AN$ ...... (a); з подібних трикутників $BNL$ та $CNJ$ маємо залежність $BC : CN = LJ : JN$ ...... ($b$). З цих залежностів ($a$) та ($b$) матимемо, що $AJ : AN = LJ : JN$ ...... ($c$), але з фіг. 26 видно, що $LJ = AJ - AL$ і $JN = AN - AJ$, через це залежність ($c$) матиме вигляд $AJ : AN = (AJ - AL) : (AN - AJ)$, або $AJ \, . \, AN - \overline{AJ}^2 = \overline{AJ} \, . \, AN - AL \, . \, AN$, звідки

$$\overline{AJ}^2 = AL \, . \, AN. \tag{26}$$

Ця залежність показує, що в і д т и н о к $AJ$, в і д т я т и й б а з о ю $CJ$ н а л і н і ї $AN$ п р и р о д н ь о г о у к о с у, є с е р е д н я п р о п о р ц і о н а л ь н а м і ж в і д т и н к о м $AN$ л і н і ї п р и р о д н ь о г о у к о с у й в і д т и н к о м $AL$, щ о й о г о в і д р і з а є о р і є н т а ц і й н а л і н і я $BL$ н а л і н і ї $AN$ п р и р о д н ь о г о у к о с у. Цю тезу дав теж Понсле́ (Poncelet), але, зважаючи на дальші праці Ребгана, вона має також назву 2-ої торееми Ребгана. Якщо взяти $AL = a$, $AJ = x$ та $AN = b$, то залежність (26) ми напишемо так:

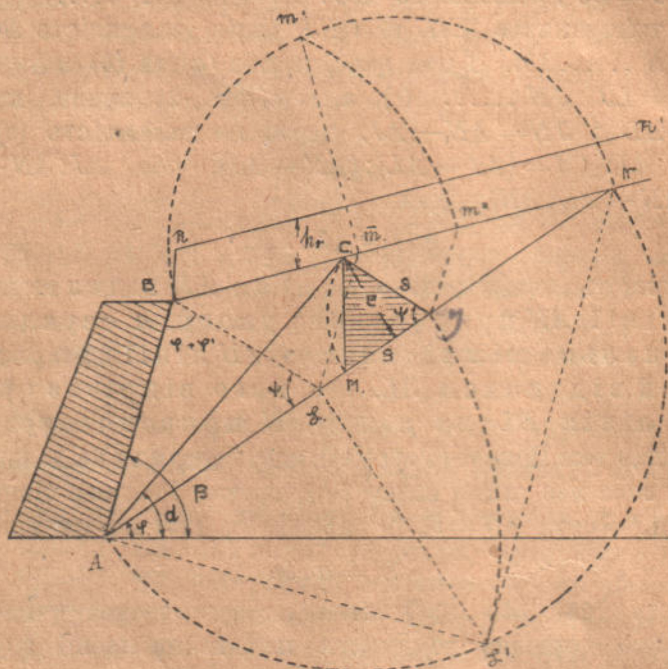
$$x^2 = a \, . \, b. \tag{26'}$$

Залежність (26) або (26′) являє собою геометричне відношення, яке дозволяє збудувати положення площі зрушення. Положення площі зрушення $AC$ (фіг. 26) визначиться, якщо визначити положення точки $J$ або точки $C$. Визначити положення точки $J$, себ-то визначити середню пропорціональну величину $AJ$ можна різними засобами; на фіг. 27, 28 й 29 зазначені різні будування для визначення положення точки $J$, а на фіг. 30 дано будування для визначення точки $C$.

1. На лінії $AN$ природнього укосу (фіг. 27), як на поперечникові, будуємо півколо; в точці $L$ орієнтаційної лінії $BL$ ставимо до $AN$ нормалю до перетину її в точці $L'$ з півколом; з'єднавши точку $L'$ з точками $A$ та $N$, матимем прямокутний трикутник $AL'N$, з якого маємо залежність $\overline{AL'}^2 = AL \, . \, AN$.

Порівнюючи цю залежність із (26), знаходимо, що $AL' = AJ$; через це, щоб збудувати положення точки $J$, затинаємо з осередку $A$ на лінії $AN$ відтинок $AJ = AL'$; далі з $J$ проводимо просту $JC$ рівнобіжну до напрямної $BL$ до перетину з лінією $BN$ землі в точці $C$; тоді площа $AC$ буде площею зрушення. На цей спосіб збудування положення площі зрушення вказав Понсле́ (Poncelet), хоч деякі автори приписують його Ребганові.

2. Півколо описують на $BN$ (фіг. 27) як на поперечникові; з кінця $L$ напрямної $BL$ проводять просту $Lm \parallel AB$ до перетину

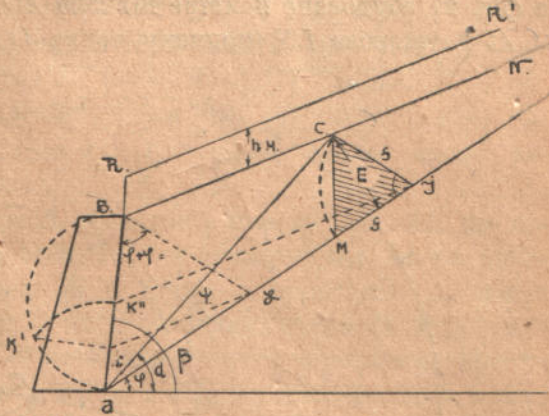


Фіг. 27.

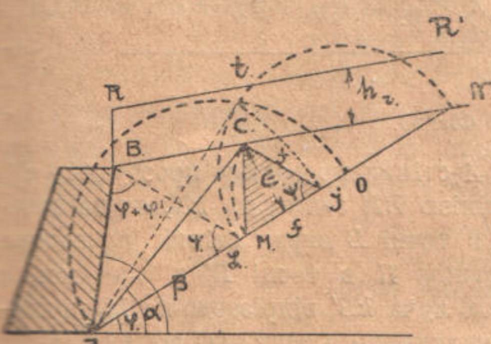
її в точці $m$ з $BN$; в точці $m$ проводять нормалю до $BN$ до перетину її в точці $m'$ з півколом; далі з осередку $B$ затинають дугою кола луча $Bm'$ відтинок $Bm'' = Bm'$ на простій $BN$, і з точки $m''$ проводять просту $m''J \parallel AB$ до перетину її в точці $J$ з лінією $AN$ природнього укосу. Коли проведемо з $J$ просту $JC \parallel BL$ до перетину її з $BN$ в точці $C$, матимем площу $AC$ зрушення.

Довід. З півкола на $BN$ маємо $\overline{Bm'}^2 = Bm \,.\, BN$ або за рівністю $Bm' = Bm''$, маємо $Bm : Bm'' = Bm'' : BN \ldots\ldots (a)$; через те, що прості $AB$, $Lm$ та $Jm''$ одна з одною рівнобіжні, то $Bm : Bm'' = AL : AJ \ldots\ldots (b)$; з подібности трикутників $BNA$ та $m''NJ$ маємо $Bm'' : BN = AJ : AN \ldots\ldots (c)$. З залежностів $(a)$, $(b)$ та $(c)$ знаходимо, що $AL : AJ = AJ : AN$, або $\overline{AJ}^2 = AL \,.\, AN$, себ-то приходимо до залежности (26).

3. Якщо точка $N$ перетину лінії землі з лінією природнього укосу виходить за межі рисунку (фіг. 28), себ-то якщо не можна збудувати півкола ні на $AN$ ні на $BN$, то півколо будують на лінії $AB$ стінки; далі з точки $L$ основи напрямної $BL$ проводять просту $Lk \parallel BN$ до перетину її з $AB$ в точці $k$; в точці $k$ ставлять нормалю до $AB$ до перетину її в точці $k'$ з півколом; далі з точки $A$ як із осередку затинають дугою луча $Ak'$ на $AB$ відтинок $Ak'' = Ak'$ і з $k''$ проводять просту $k''J \parallel BN$ до перетину її в точці $J$ з лінією $AN$ природнього укосу; коли тепер провести з $J$ просту $JC \parallel BL$ до перетину її в точці $C$ з $BN$, матимем площу $AC$ зрушення.



Фіг. 28.

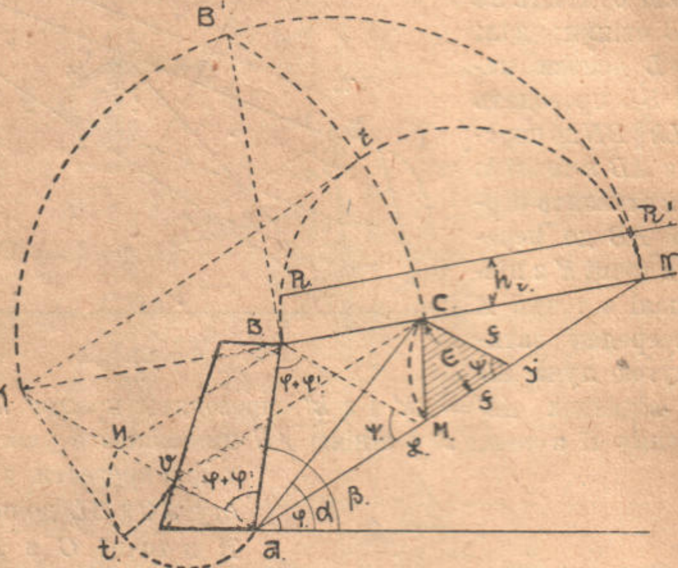


Фіг. 29.

Довід. З півкола на $AB$ ми маємо залежність: $\overline{Ak'}^2 = Ak \,.\, AB$, або $\overline{Ak''}^2 = Ak \,.\, AB$, звідки $Ak : Ak' = Ak'' : AB \ldots (a)$. З подібних трикутників $kAL$ та $k''AJ$ маємо, що $Ak'' : AB = AJ : AN \ldots\ldots (b)$, а з подібних трикутників $k''AL$ та $BAN$ маємо $Ak'' : AB = AJ : AN \ldots (c)$; із залежностів $(a)$,$(b)$ й $(c)$ знаходимо, що $AL : AJ = AJ : AN$, себ-то $\overline{AJ}^2 = AL \,.\, AN$; отже знову ми приходимо до залежности (26).

4. На фіг. 29 будуємо півколо на $LN$, як на поперечникові, і з точки $A$ (спід стінки) проводимо до цього півкола дотичну $At$; далі з точки $A$, як з осередку, дугою луча $At$ затинаємо на $AN$ відтинок $AJ = At$. Отже, точка $J$, а значить, і точка $C$ визначені.

Довід. Із властивости дотичної $At$ й січної $AN$ маємо, що $At^2 = AL.AN$; порівнюючи цю залежність з (26), бачимо, що $At = AJ$. На фіг. 29 збудоване помічне півколо $AO$ для збудування дотичної $At$ до півкола $LN$, причому точка $O$ є осередок півкола $LN$.




Фіг. 30.

5. На фіг. 30 через спід $A$ стінки проводимо просту $Ak \parallel BL$ до перетину її в точці $k$ з лінією $BN$ землі; на $kN$, як на поперечникові, будуємо півколо; в точці $B$ верху стінки проводимо до $BN$ нормалю $BB'$ до перетину її в точці $B'$ з півколом, а з точки $k$, як з осередку, дугою луча $kB'$ відрізаємо на $kN$ відтинок $kC = kB'$; тоді точка $C$ визначить площу $AC$ зрушення.

Довід. Для півкола маємо залежність $kB'^2 = kB.kN$, або $kC^2 = kB.kN$, звідки $kB : kC = kC : kN \ldots\ldots (a)$. Прості $kA$, $BL$ та $CJ$ рівнобіжні, а тому $kB : kC = AL : AJ \ldots\ldots (b)$; з подібних трикутників $kNA$ та $CNJ$ маємо $kC : kN = AJ : AN \ldots\ldots (c)$. З цих залежностів $(a)$, $(b)$ та $(c)$ знаходимо, що $AL : AJ = AJ : AN$ або $\overline{AJ}^2 = AL.AN$, себ-то ми знову маємо залежність (26).

6. На фіг. 30 будуємо півколо на $BN$, як на поперечникові, а з точки $k$ перетину лінії $BN$ землі з простою $Ak$ рівнобіжною до $BL$ проводимо дотичну $kt$; далі з точки $k$, як з осередку, другою луча $kt$ відрізаємо на простій $kN$ відтинок $kC = kt$, й таким чином визначаємо положення точки $C$, а значить і площі $AC$ зрушення.

Довід. Із властивости дотичної та січної маємо $\overline{kt}^2 = kB \,.\, kN$, або $\overline{kC}^2 = kB \,.\, kN$, звідки $kB : kC = kC : kN \ldots\ldots (a)$. Прості $kA$, $BL$ та $CJ$ рівнобіжні, тому маємо, що $kB : kC = AL : AJ \ldots\ldots (b)$; з подібних трикутників $kNA$ та $CNJ$ маємо, що $kC : kN = AJ : AN \ldots (c)$. Згідно з цими трьома залежностями $(a)$, $(b)$ та $(c)$ маємо, що $AL : AJ = AJ : AN$, або $\overline{AJ}^2 = AL \,.\, AN$, себ-то знову маємо залежність (26).

7. На фіг. 30 з точки $B$ проводимо просту $Bu \parallel AN$ до перетину її в точці $u$ з простою $kA$; на довжині $uA$, як на поперечникові, будуємо півколо й з точки $k$ проводимо до нього дотичну $kt'$; потім з точки $k$, як із осередку, лучем $kt'$ відрізаємо на простій $kA$ відтинок $kv = kt'$, а з точки $v$ проводимо просту $vC \parallel AN$ до перетину її в точці $C$ з $BN$. Отже положення площі $AC$ зрушення є визначене.

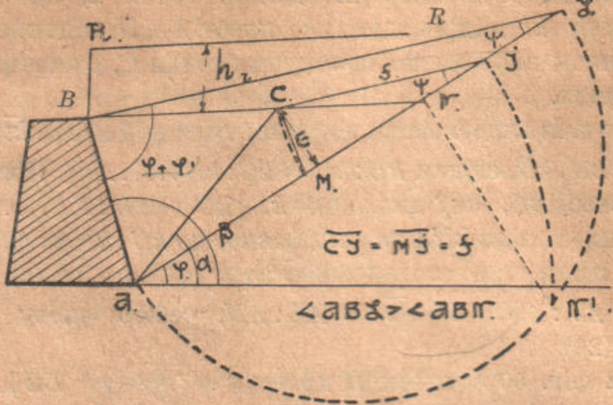
Довід. Із властивости дотичної й січної маємо $\overline{kt'}^2 = ku \,.\, kA$, або $\overline{kv}^2 = ku \,.\, kA$, звідки $ku : kv = kv : kA \ldots\ldots (a)$; з подібних трикутників $vkC$ та $ukB$ маємо, що $ku : kv = uB : vC$, або вважаючи за рівність відтинків $uB = AL$, а $vC = AJ$, маємо: $ku : kv = AL : AJ \ldots\ldots (b)$; з подібних трикутників $AkN$ та $vkC$ маємо $kv : kA = vC : AN$ або $kv : kA = AJ : AN \ldots\ldots (c)$. Із залежностів $(a)$, $(b)$ та $(c)$ знаходимо, що $AL : AJ = AJ : AN$, або $\overline{AJ}^2 = AL \,.\, AN$, себ-то ми маємо знову доведену вище залежність (26). Зазначене збудування для визначення положення площі $AC$ зрушення дав Понсле́ (Poncelet).

### Окремі випадки.

*1. Кут $ABL$, що його утворює орієнтаційна лінія $BL$ з стінкою $AB$, більший за кут $ABN$, що його утворює лінія землі з стінкою* ($\angle ABL > \angle ABN$) (фіг. 31).

У цьому випадкові півколо будують на $AL$, як на поперечникові, а в точці $N$ проводять до $AN$ нормалю $NN'$ до перетину її з півколом у точці $N'$; далі на $AN$ відкладають відтинок

$AJ = AN'$ і одержують точку $J$; коли проведемо з $J$ просту $JC \parallel BL$, то визначимо точку $C$, а значить і площу $AC$ зрушення. Дійсно,

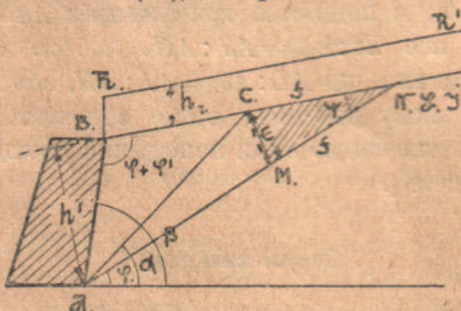



Фіг. 31.

з півкола ми маємо, що $\overline{AN'}^2 = AL \cdot AN$, або $\overline{AJ}^2 = AL \cdot AN$, себ-то знову маємо залежність (26). Трикутник тиску буде $\triangle CJM$.

*2. Кут $ABL$, що його утворює орієнтаційна лінія $BL$ з стінкою $AB$, дорівнює кутові $ABN$, що його утворює лінія землі з стінкою ($\angle ABL = \angle ABN$)* (фіг. 32).

У цьому випадкові точки $N, L$ та $J$ збігаються. А що $\triangle ABC = \triangle ACJ$ (див. залежність (25)), то при тій самій їх висоті $h'$ основи

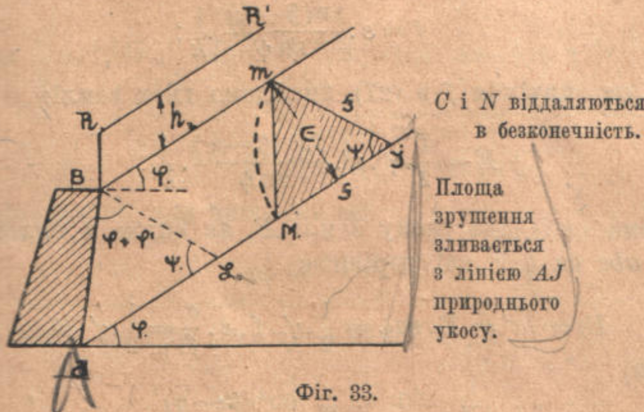



Фіг. 32.

їхні $BC$ та $CJ$ рівні, себ-то $BC = CJ$; отже, щоб отримати точку $C$, проводимо лінію $AN$ природнього укосу до перетину її в точці $N$ з лінією землі й ділимо довжину $BN$ на дві рівні частині; середина $BN$ і буде точка $C$. Зважаючи на злиття точок $N, L$ та $J$, ми маємо, що $CJ = CN = CL = f$. Трикутник тиску є $\triangle CJM$.

2. *Лінія землі рівнобіжна з лінією природнього укосу* (фіг. 33).

У цьому випадкові точка $N$ перетину лінії землі та лінії природнього укосу й точка $C$ площі зрушення віддаляються в безконечність; площа зрушення зливається з лінією природнього




Фіг. 33.

укосу. Трикутника тиску $mJM$ будують для довільної точки $m$, бо відтинок $mJ$ рівний $f$ зберегає свою довжину як постійну між рівнобіжними простими $BN$ землі та $AN$ природнього укосу.

## § 10. Аналітичне визначення тиску землі й положення площі зрушення (фіг. 26).

Згідно з виразом (21) § 7 тиск землі $E = \frac{1}{2} . f . e . \gamma'$; але $e = f . \operatorname{sn}\phi$ (фіг. 26), а через це

$$E = \frac{1}{2} . f^2 . \operatorname{sn}\phi . \gamma'. \qquad (27)$$

Із подібних трикутників $BNL$ та $CNJ$ маємо, що $f : BL = JN : LN$, або $f : BL = (b - x) : (b - a)$, звідки $f = \overline{BL} . (b - x) : (b - a) =$

$$= \overline{BL} . (b - \sqrt{a . b}) : (b - a) = \overline{BL} . \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right) =$$

$$= \overline{BL} . \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}}\right) : \left[1 - \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2\right] =$$

$$= \overline{BL} . \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}}\right) : \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}}\right) = \overline{BL} : \left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}}\right);$$

беручи $k=1+\sqrt{\frac{a}{b}}$, ми маємо $f=\frac{\overline{BL}}{k}$; але з $\triangle BLA$ маємо

$$\overline{BL}=s\,.\frac{\operatorname{sn}(\beta-\varphi)}{\operatorname{sn}\psi},$$

отже

$$f=s\,.\frac{\operatorname{sn}(\beta-\varphi)}{\operatorname{sn}\psi}\,.\frac{1}{k}; \tag{28}$$

ставлячи це значіння $f$ в (27), знайдемо тиск землі:

$$E=\frac{1}{2}\,.\,\gamma'\,.\,s^2.\frac{\operatorname{sn}^2(\beta-\varphi)}{\operatorname{sn}\psi}\,.\frac{1}{k^2}. \tag{29}$$

Позема складова тиску землі $E$, як видко з силового трикутника $abc$ на фіг. 25′, дорівнює

$$E_h=\overline{bc'}=E\,.\operatorname{sn}\psi=\frac{1}{2}\,.\,\gamma'\,.\,f\,.\,e\,.\,\frac{e}{f}=\frac{1}{2}\,.\,\gamma'\,.\,e^2 \tag{30}$$

або за (29)

$$E_h=\frac{1}{2}\,.\,\gamma'\,.\,s^2\,.\frac{\operatorname{sn}^2(\beta-\varphi)}{k^2}. \tag{30′}$$

З того-ж силового трикутника $abc$ на фіг. 25′ одержимо прямовісну складову тиску землі:

$$E_v=\overline{c'c}=E_h\,.\operatorname{ctg}\psi=\frac{1}{2}\,.\,\gamma'\,.\,s^2\,\frac{\operatorname{sn}^2(\beta-\varphi)}{k^2}\,.\operatorname{ctg}\psi. \tag{31}$$

Так само з фіг 25′ можна визначити реакцію на площі $AC$:

$$Q=E\,\frac{\operatorname{sn}\psi}{\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)}$$

або

$$Q=\frac{1}{2}\,.\,\gamma'\,.\,s^2\,.\,\frac{\operatorname{sn}^2(\beta-\varphi)}{\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)}; \tag{32}$$

але з трикутника $ACJ$ (фіг. 26)

$$\frac{\operatorname{sn}\psi}{\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)}=\frac{AC}{CJ}=\frac{AC}{f},$$

отже

$$Q=E\,\frac{\operatorname{sn}\psi}{\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)}=E\,\frac{AC}{f}.$$

Вважаючи, що $AC=L$, матимем, що

$$Q=\frac{1}{2}\,.\,f\,.\,e\,.\,\gamma'\,.\,\frac{L}{f}=\frac{1}{2}\,.\,\gamma'\,.\,e\,.\,L. \tag{33}$$

З $\triangle\triangle ABL$ та $ABN$ маємо, що

$$AL = a = s \,.\, \frac{\operatorname{sn}(\varphi + \varphi')}{\operatorname{sn}\psi} \tag{34}$$

і

$$AN = b = s\frac{\operatorname{sn}(180 - \beta + \delta)}{\operatorname{sn}(\varphi - \delta)} = s \,.\, \frac{\operatorname{sn}(\beta - \delta)}{\operatorname{sn}(\varphi - \delta)}, \tag{35}$$

звідки $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\operatorname{sn}(\varphi + \varphi') \,.\, \operatorname{sn}(\varphi - \delta)}{\operatorname{sn}(\beta - \delta) \,.\, \operatorname{sn}\psi}$; що $k = 1 + \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, значить

$$k = 1 + \sqrt{\frac{\operatorname{sn}(\varphi + \varphi') \,.\, \operatorname{sn}(\varphi - \delta)}{\operatorname{sn}(\beta - \delta) \,.\, \operatorname{sn}\psi}}. \tag{36}$$

Визначімо тепер для скорочення:

$$m = \frac{\operatorname{sn}(\beta - \varphi)}{k}; \tag{36a}$$

тоді згідно з (29) та (30′) тиск землі буде:

$$E = \frac{1}{2} \,.\, \gamma' \,.\, s^2 \,.\, m^2 \frac{1}{\operatorname{sn}\psi} \tag{37}$$

і позема складова земляного тиску

$$E_h = \frac{1}{2} \,.\, \gamma' \,.\, s^2 \,.\, m^2. \tag{38}$$

Положення площі $AC$ зрушення (фіг. 26) можна визначити віддаллю $BC$ точки $C$ од вершини $B$ стінки. З подібних $\triangle\triangle BNL$ та $CNJ$ маємо, що

$$BC = CN \,.\, \frac{LJ}{JN} = CN\frac{x - a}{b - x} = CN\frac{\sqrt{a \,.\, b} - a}{b - \sqrt{a \,.\, b}} =$$

$$= CN\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{a}{b}}{1 - \sqrt{\frac{a}{b}}} = CN\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \,.\, \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{\left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)} = CN\sqrt{\frac{a}{b}};$$

що $k = 1 + \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = k - 1$, а тому $BC = CN \,.\, (k - 1)$;

з $\triangle CNJ$ маємо, що

$$CN = CJ \,.\, \frac{\operatorname{sn}(180^0 - \psi)}{\operatorname{sn}(\varphi - \delta)} = f \,.\, \frac{\operatorname{sn}\psi}{\operatorname{sn}(\varphi - \delta)}$$

або згідно з (28)

$$CN = s \,.\, \frac{\operatorname{sn}(\beta - \varphi)}{\operatorname{sn}(\varphi - \delta)} \,.\, \frac{1}{k};$$

отже

$$BC = s \cdot \frac{\operatorname{sn}(\beta-\varphi)}{\operatorname{sn}(\varphi-\delta)} \cdot \frac{k-1}{k},$$

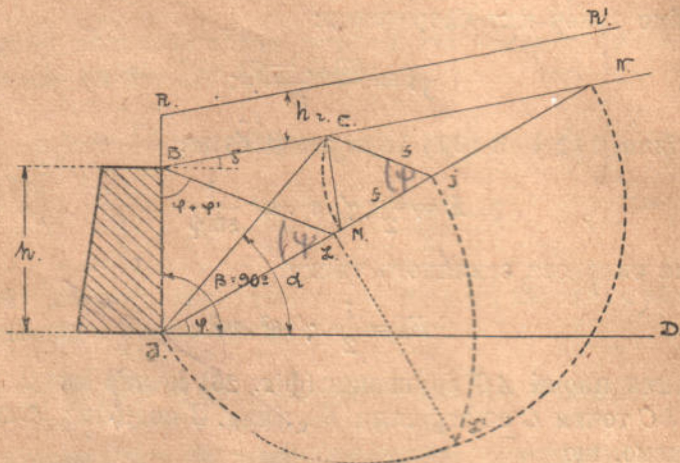
або згідно з (37)

$$BC = s \cdot m \cdot \frac{k-1}{\operatorname{sn}(\varphi-\delta)}. \qquad (39)$$

**Окремі випадки.**

*1. Прямовісна стінка й похила лінія землі* (фіг. 34).

У даному випадкові $\beta = 90^0 = \angle BAD$, $s = h$; отже $\psi = 180^0 - (\beta + \varphi') = 180^0 - (90 + \varphi') = 90^0 - \varphi'$; а тому $\operatorname{sn}\psi = \operatorname{sn}(90^0 - \varphi') =$




Фіг. 34.

$= \operatorname{cs}\varphi'$, $\operatorname{sn}(\beta-\delta) = \operatorname{sn}(90^0-\delta) = \operatorname{cs}\delta$, і $\operatorname{sn}(\beta-\varphi) = \operatorname{cs}\varphi$; тоді згідно з (36) та (37) маемо

$$k = 1 + \sqrt{\frac{\operatorname{sn}(\varphi+\varphi') \cdot \operatorname{sn}(\varphi-\delta)}{\operatorname{cs}\delta \cdot \operatorname{cs}\varphi'}} \qquad (40)$$

і

$$m = \frac{\operatorname{cs}\varphi}{k}. \qquad (41)$$

Згідно з (29), (30′) та (39) маемо:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \gamma' \cdot h^2 \cdot \frac{\operatorname{cs}^2\varphi}{k^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{cs}\varphi'}, \qquad (42)$$

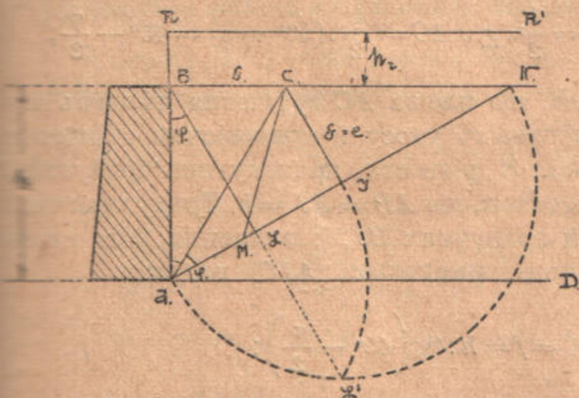
$$E_h = \frac{1}{2} \cdot \gamma' \cdot h^2 \cdot \frac{\operatorname{cs}^2\varphi}{k^2}, \qquad (43)$$

і

$$\overline{BC} = h \cdot \frac{\operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}(\varphi-\delta)} \cdot \frac{k-1}{k}. \qquad (44)$$

2. *Прямовісна рівна стінка й позема лінія землі* (фіг. 35).

В даному разі $\varphi' = 0$, отже орієнтаційна лінія $BL$ утворює з прямовісною стінкою $AB$ кут $ABL = \varphi$, а через те орієнтаційна лінія $BL$ нормальна до лінії $AN$ природнього укосу, себ-то $\triangle BLA$ прямокутний трикутник з прямим кутом у точці $L$. Якщо збудувати площу зрушення, то за Poncelet орієнтаційна лінія $BL$ та нормаля $LL'$ до $AN$ лінії природнього укосу зливаються




$\beta = 90^0 = \angle BAD, \delta = 0,$
$\varphi' = 0, s = h = \overline{AB};$
$\overline{AJ} = \overline{AB} = h,$
$\angle BLA = 90^0, \angle CJM = 90^0,$
$\overline{BC} = \overline{CJ} = \overline{MJ} = f =$
$= h.\ \mathrm{tg.}\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right),$
$< BAC = < CAJ = 45 - \frac{\varphi}{2}.$

**Трикутник тиску є прямокутний трикутник** *CJM*.

Фіг. 35.

в одну просту $BL'$; проста $JC$, рівнобіжна до $BL$, буде нормальна до $AN$ лінії природнього укосу, отже трикутник $AJC$ буде прямокутний при вершині $J$. Для даного випадку ми маємо: $s = h$, $\beta = 90^0$, $\varphi' = 0$ і $\delta = 0$; отже $\mathrm{sn}(\varphi + \varphi') = \mathrm{sn}\varphi$, $\mathrm{sn}(\varphi - \delta) = \mathrm{sn}\varphi$, $\mathrm{sn}(\beta - \delta) = 1$, $\mathrm{sn}(\beta - \varphi) = \mathrm{cs}\varphi$, $\psi = 180^0 - (\beta + \varphi') = 90^0$ і $\mathrm{sn}\psi = 1$; тому

$$k = 1 + \mathrm{sn}\varphi\ (45) \text{ і } m = \frac{\mathrm{cs}\varphi}{k} = \frac{\mathrm{cs}\varphi}{1 + \mathrm{sn}\varphi} \qquad (46),$$

$$E = E_h = \frac{1}{2} \cdot \gamma' . h^2 . \frac{\mathrm{cs}^2 \varphi}{(1 + \mathrm{sn}\varphi)^2} = \frac{1}{2} \cdot \gamma' . h^2 . \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right). \qquad (47)^*)$$

---

*) $$\frac{\mathrm{cs}^2\varphi}{(1 + \mathrm{sn}\varphi)^2} = \frac{1 - \mathrm{sn}^2\varphi}{(1 + \mathrm{sn}\varphi)^2} = \frac{(1 + \mathrm{sn}\varphi).(1 - \mathrm{sn}\varphi)}{(1 + \mathrm{sn}\varphi).(1 + \mathrm{sn}\varphi)} = \frac{1 - \mathrm{sn}\varphi}{1 + \mathrm{sn}\varphi} =$$

$$= \frac{\mathrm{cs}^2\frac{\varphi}{2} + \mathrm{sn}^2\frac{\varphi}{2} - 2 . \mathrm{sn}\frac{\varphi}{2} . \mathrm{cs}\frac{\varphi}{2}}{\mathrm{cs}^2\frac{\varphi}{2} + \mathrm{sn}^2\frac{\varphi}{2} + 2 . \mathrm{sn}\frac{\varphi}{2} . \mathrm{cs}\frac{\varphi}{2}} = \frac{\left(\mathrm{cs}\frac{\varphi}{2} - \mathrm{sn}\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\left(\mathrm{cs}\frac{\varphi}{2} + \mathrm{sn}\frac{\varphi}{2}\right)^2} = \left(\frac{\mathrm{cs}\frac{\varphi}{2} - \mathrm{sn}\frac{\varphi}{2}}{\mathrm{cs}\frac{\varphi}{2} + \mathrm{sn}\frac{\varphi}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 - \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{tg}45^0 - \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + 1 . \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{tg}45^0 - \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \mathrm{tg}45^0 . \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

$$\overline{BC} = h \, . \, \frac{\mathrm{cs}\varphi}{1 + \mathrm{sn}\varphi} = h \, . \, \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{48}$$

Тут тиск землі $E$ на прямовісну стінку направлений поземо, бо кут цього тиску з нормаллю до стінки, себ-то з вертикаллю, дорівнює нулеві ($\varphi' = 0$). Через те, що прямокутні трикутники $ABC$ й $AJC$, маючи спільну гіпотенузу $AC$, за першою теоремою Понсле́-Ребгана мають рівні поверхні, то

$$\angle JAC = \angle BAC = \frac{1}{2} \, . \angle JAC = \frac{1}{2} \, . (90^0 - \varphi) = 45^0 - \frac{\varphi}{2};$$

звідси робимо висновок, що площа $AC$ зрушення ділить кут $BAN$ між лінією природнього укосу й прямовісною стінкою на дві рівні частині. З рівности прямокутних трикутників $ABC$ й $AJC$ виходить також, що $AB = AJ = h$. Трикутник тиску тут — це прямокутний трикутник $CJM$; величина його катета, як видно з прямокутного трикутника $AJC$, дорівнює

$$JC = f = h \, . \, \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right);$$

а тому тиск землі $E$ ми можемо одержати безпосередньо з поверхні трикутника тиску, а саме

$$E = \frac{1}{2} \, . \, \gamma' \, . \, f \, . \, e = \frac{1}{2} \, . \, \gamma' \, . \, f^2 = \frac{1}{2} \, . \, \gamma' \, . \, h^2 \, . \, \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right);$$

так само з фіг. 35 матимем

$$\overline{BC} = AB \, . \, \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = h \, . \, \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Через те що $\gamma' = \gamma\left(1 + \frac{2 \, . \, h_r \, . \, \mathrm{cs}\delta}{h'}\right)$, ми маємо в даному разі при $\delta = 0$ та $h' = h$, що $\gamma' = \gamma\left(1 + \frac{2 \, . \, h_r}{h}\right)$; отже, згідно з (47) тиск землі можна написати в такій формі:

$$E = E_h = \frac{1}{2} \gamma \, . \, h^2 \, . \, \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) . \left(1 + \frac{2 \, . \, h_r}{h}\right) \tag{47a}$$

або

$$E = E_h = \frac{1}{2} \gamma \, . \, \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) . \, (h^2 + 2 \, . \, h_r \, . \, h). \tag{47b}$$

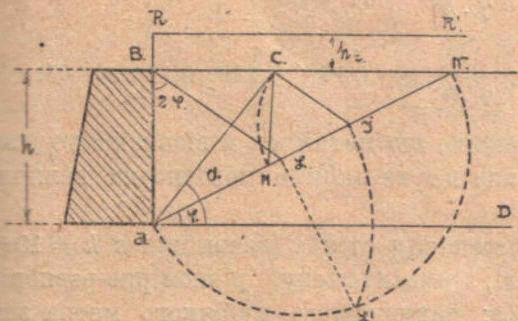
Якщо позема поверхня землі не навантажена, то $h_r = 0$, а, значить, $\gamma' = \gamma$; а через те тиск землі буде:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) . h^2 . \tag{47c}$$

Положення площі зрушення $AC$ можна визначити і в цьому разі за (48).

*3. Прямовісна стінка при поземій поверхні землі й $\varphi' = \varphi$* (фіг. 36).

В даному разі $\beta = 90^0$, $\delta = 0$, $\varphi' = \varphi$ й $s = h$; а тому $\mathrm{sn}(\varphi + \varphi') = \mathrm{sn}\,2\varphi$, $\mathrm{sn}(\varphi - \delta) = \mathrm{sn}\varphi$, $\mathrm{sn}(\beta - \delta) = 1$, $\mathrm{sn}\psi = \mathrm{sn}[180^0 - (90^0 + \varphi)] =$




$$\beta = 90^0 = \angle BAD, \delta = 0.$$
$$\varphi' = \varphi, s = h = \overline{AB};$$
$$\overline{BC} = h \frac{\mathrm{cs}\varphi \sqrt{2}}{1 + \mathrm{sn}\varphi \sqrt{2}}$$

Фіг. 36.

$= \mathrm{sn}(90^0 - \varphi) = \mathrm{cs}\varphi$ й $\mathrm{sn}(\beta - \varphi) = \mathrm{sn}(90^0 - \varphi) = \mathrm{cs}\varphi$; тоді за (36) й (36*a*) маємо

$$k = 1 + \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,2\varphi \, . \, \mathrm{sn}\varphi}{\mathrm{cs}\varphi}} = 1 + \sqrt{2\,\mathrm{sn}^2\varphi} = 1 + \mathrm{sn}\varphi \, . \sqrt{2}$$

і

$$m = \frac{\mathrm{cs}\varphi}{1 + \mathrm{sn}\varphi \, . \sqrt{2}};$$

отже згідно з (37) та (38) тиск землі

$$E = \frac{1}{2} . \gamma' . h^2 . \frac{\mathrm{cs}\varphi}{(1 + \mathrm{sn}\varphi \, . \sqrt{2})^2}, \tag{49}$$

а позема складова тиску землі

$$E_h = \frac{1}{2} . \gamma' . h^2 . \frac{\mathrm{cs}^2\varphi}{(1 + \mathrm{sn}\varphi \, . \sqrt{2})^2} . \tag{50}$$

Положення площі зрушення за (39) визначиться віддаллю

$$\overline{BC} = h \cdot \frac{\mathrm{cs}\varphi}{1 + \mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2}}{\mathrm{sn}\varphi} = h \cdot \frac{\mathrm{cs}\varphi \cdot \sqrt{2}}{1 + \mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2}} =$$

$$= h \cdot \frac{\mathrm{cs}\varphi}{\mathrm{sn}45^0 + \mathrm{sn}\varphi}. \qquad (51)$$

Щоб вияснити вплив тертя землі об стінку, порівняймо формули (47) та (50) для випадків 2 й 3 ($\varphi' = 0$ та $\varphi' = \varphi$) з різними значіннями кута $\varphi$; тоді отримаємо такі цифри:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| при $\varphi$ = | $25^0$ | $30^0$ | $35^0$ | $40^0$ |
| за формулою (47): $\frac{E}{\gamma \cdot h^2}$ = | 0,203 | 0,166 | 0,136 | 0,109 |
| за формулою (50): $\frac{E}{\gamma' \cdot h^2}$ = | 0,178 | 0,149 | 0,124 | 0,105; |

з цих цифрових даних видко, що нехай ми й візьмемо до уваги тертя землі об стінку, але це не вплине помітно на величину тиску землі на стінку.

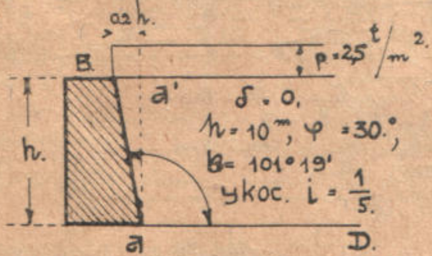
Візьмімо, напр., прямовісну стінку заввишки з $h = 10^m$ і позему поверхню землі, навантажену рівномірно-розподіленою вантагою $p = 2{,}5^{tn}/_{m^2}$; вагу одного кубічного метра землі беремо $\gamma = 1{,}8^{tn}/_{m^3}$; тоді $\gamma' = \gamma + \frac{2 \cdot p}{h} = 1{,}8 + \frac{2 \cdot 2{,}5}{10} = 2{,}3^{tn}/_{m^3}$. Значить, у цьому випадкові ми маємо такі цифри:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| при $\varphi$ = | $25^0$ | $30^0$ | $35^0$ | $40^0$ |
| за формулою (47): $E$ = | $46{,}69^t$ | $38{,}2^t$ | $31{,}3^t$ | $25{,}1^t$ |
| за формулою (50): $E$ = | $41^t$ | $34{,}3^t$ | $28{,}5^t$ | $24{,}2^t$; |

звідси знову видко, що величини тиску землі $E$ за обома формулами мало різняться, хоч за формулою (47) ці величини трохи більші. Через те иноді при поземій поверхні землі для того, щоб піднести ступінь надійности стінки, коли вона прямовісна, обчисляють тиск землі за формулою (47), хоч цей тиск і становить з нормаллю до стінки (в даному разі з поземою лінією) кут $\varphi'$.

Розгляньмо тепер вплив кута тертя $\varphi'$ при похилій стінці. Припустімо, що ми маємо стінку (фіг. 37), для якої $h = 10^m$, $\angle \beta = \angle BAD = 101^0 19'$, $\delta = 0$ і $p = 2{,}5^{tn}/_{m^2}$; похил стінки $AB$ до вертикали дорівнює $i = 0{,}2 = \frac{1}{5} = \operatorname{tg} \angle BAA'$; вага кубічного метра землі $\gamma = 1{,}8^{tn}/_{m^3}$, отже $\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h} = 1{,}8 + \frac{2 \,.\, 2{,}5}{10} = 2{,}3^{tn}/_{m^3}$. Кут $\varphi$ природнього укосу візьмімо в $30^0$; тоді $\operatorname{sn}(\varphi + \varphi') = \operatorname{sn}(30^0 + \varphi')$, $\operatorname{sn}(\varphi - \delta) = \operatorname{sn} 30^0 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sn}(\beta - \delta) = \operatorname{sn} 101^0 19' = \operatorname{cs} 11^0 19' = 0{,}98056$, $\operatorname{sn} \psi = \operatorname{sn}[180^0 - (\beta + \varphi')] = \operatorname{sn}(78^0 41' - \varphi')$, $\operatorname{sn}(\beta - \varphi) = \operatorname{sn}(101^0 19' - 30^0) = \operatorname{sn} 71^0 19' = 0{,}94731$; далі $s^2 = 10^2 + 2^2 = 104$, отже

$$\gamma' \,.\, s^2 = 2{,}3 \,.\, 104 = 239.$$




Фіг. 37.

Надаючи різних значінь кутові $\varphi'$, матимем величини тиску $E$ за (37)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi' =$ | $0^0$ | $10^0$ | $20^0$ | $30^0$ |
| $k =$ | 1,51 | 1,59 | 1,68 | 1,77 |
| $m =$ | 0,627 | 0,595 | 0,565 | 0,535 |
| $\frac{E}{\gamma' \,.\, s^2} =$ | 0,200 | 0,189 | 0,186 | 0,190 |
| $E =$ | $47{,}8^{tn}$ | $45{,}2^{tn}$ | $44{,}5^{tn}$ | $45{,}4^{tn}$; |

З цих значінь $E$ видко, що в межах значінь $\varphi'$ од $10^0$ до $30^0$ кут $\varphi'$ при похилій стінці теж не впливає помітно.

## § 11. Тиск води на стінку.

Користуючись з формули (29) тиску землі на стінку, можна знайти величину тиску води на стінку, якщо взяти $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ (в плині немає тертя), $\delta = 0$ (рівень води поземий), а замість $\gamma'$ взяти $\gamma_w$ — вагу одиниці об'єму води; тоді $\operatorname{sn}(\varphi + \varphi') = 0$, $\operatorname{sn}(\varphi - \delta) = 0$, $\operatorname{sn}(\beta - \delta) = \operatorname{sn}\beta$, $\operatorname{sn}\psi = \operatorname{sn}[180^0 - (\beta + \varphi')] = \operatorname{sn}(180^0 - \beta) = \operatorname{sn}\beta$ і $\operatorname{sn}(\beta - \varphi) = \operatorname{sn}\beta$; згідно з (36) та (36$a$) маємо $k = 1$ і $m = \operatorname{sn}\beta$;

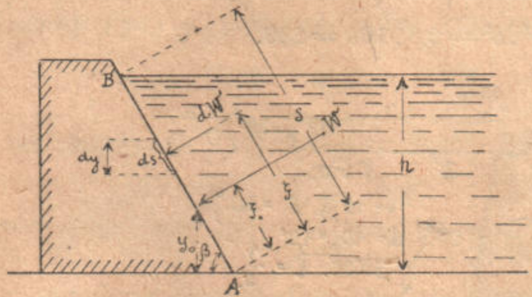
отже за (29) тиск води на стінку буде

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma_w \cdot s^2 \cdot \mathrm{sn}\beta \,. \tag{52}$$

Якщо висота рівня води є $h$ (фіг. 38), то $s = \frac{h}{\mathrm{sn}\beta}$, і значить за (52) тиск води

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma_w \cdot h^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}\beta} \,. \tag{53}$$

Тиск $W$ води спрямований нормально до стінки $AB$, бо




$W = \frac{1}{2} \gamma_w s^2 \mathrm{sn}\beta = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \frac{1}{\mathrm{sn}\beta}$

$\xi_0 = \frac{s}{3}$, $y_0 = \frac{h}{3}$

Фіг. 38.

$\varphi' = 0$. Якщо задній бік $AB$ стінки прямовісний (фіг. 39), то $\beta = 90^\circ$, отже $\mathrm{sn}\beta = 1$; а тому тиск води буде:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma_w \cdot h^2 \tag{54}$$

Звичайно, тиск води на стінку можна визначити й незалежно від формули (29). Справді, елементарний тиск на елементарну площинку $ds \,.\, 1$ (фіг. 38) буде $ds \,.\, 1 \,.\, y \,.\, \gamma_w$ або $ds \,.\, y \,.\, \gamma_w$; отже цілий тиск води на всю стінку $AB$ буде

$$W = \int_{y=0}^{y=h} ds \,.\, y \,.\, \gamma_w ;$$

але

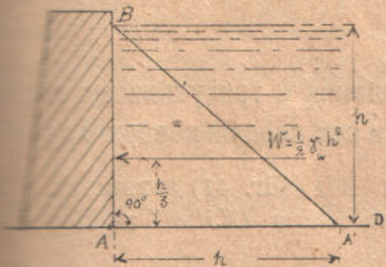
$$ds = \frac{dy}{\mathrm{sn}\beta} ,$$

отже

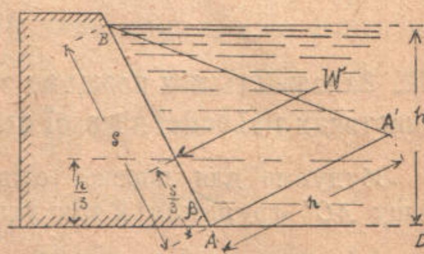
$$W = \int_{y=0}^{y=h} \frac{\gamma_w}{\mathrm{sn}\beta} \,.\, y \,.\, dy = \frac{\gamma_w}{\mathrm{sn}\beta} \,.\, \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \gamma_w \,.\, h^2 . \frac{1}{\mathrm{sn}\beta} ,$$

себ-то те-ж саме, що й за формулою (53). А що $h = s . \mathrm{sn}\beta$, то $W = \frac{1}{2} \cdot \gamma_w \,, s^2 . \mathrm{sn}\beta$, себ-то те самісіньке, що й за формулою (52).

$\frac{1}{2}h^2 \cdot \frac{1}{\text{sn}\beta} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{h}{\text{sn}\beta} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot s$ дорівнює поверхні прямокутного трикутника з катетами $s$ та $h$ (фіг. 40), тому, щоб знайти тиск води на стінку, треба призму $BAA'$ (з основою в формі прямокутного трикутника $BAA'$ й висотою рівною 1) помножити на вагу $\gamma_w$ одиниці об'єму води. Отже тиск води пропорціональний поверхні прямокутного трикутника $BAA'$, що й зветься **т р и к у т н и к о м т и с к у**. Коли стінка $AB$ прямовісна (фіг. 39), трикутник




Фіг. 39.




Фіг. 40.

тиску буде прямокутний трикутник $BAA'$ з рівними катетами $\overline{AB} = \overline{AA'} = h$.

Через те, що момент відносно основи $A$ (фіг. 38) стінки повного тиску $W$ води дорівнює сумі моментів елементарних тисків $ds \cdot \gamma_w \cdot y$, то маємо згідно з позначеннями фіг. 38, що $W \cdot \xi_0 = \int ds \cdot \gamma_w \cdot y \cdot \xi$; підставляючи сюди величину $W$ з (53) і $ds = \frac{dy}{\text{sn}\beta}$ і $\xi = \frac{h-y}{\text{sn}\beta}$ матимем, що

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_w \cdot \frac{h^2}{\text{sn}\beta} \cdot \xi_0 = \gamma_w \cdot \frac{1}{\text{sn}^2\beta} \int\limits_{y=0}^{y=h} y(h-y) \cdot dy$$

або

$$\frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \xi_0 = \frac{1}{\text{sn}\beta} \left( \frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=h} = \frac{1}{\text{sn}\beta} \cdot \frac{h^3}{6},$$

звідки знаходимо

$$\xi_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{\text{sn}\beta}. \qquad (55)$$

Але $h = s\ \text{sn}\beta$, тому

$$\xi_0 = \frac{s}{3}. \qquad (55a)$$

Коли бік $AB$ стінки прямовісний (фіг. 39), то $\operatorname{sn}\beta = \operatorname{sn} 90^0 = 1$, і тому за (55) віддаль зачепної точки водяного тиску $W$ від основи $A$ буде

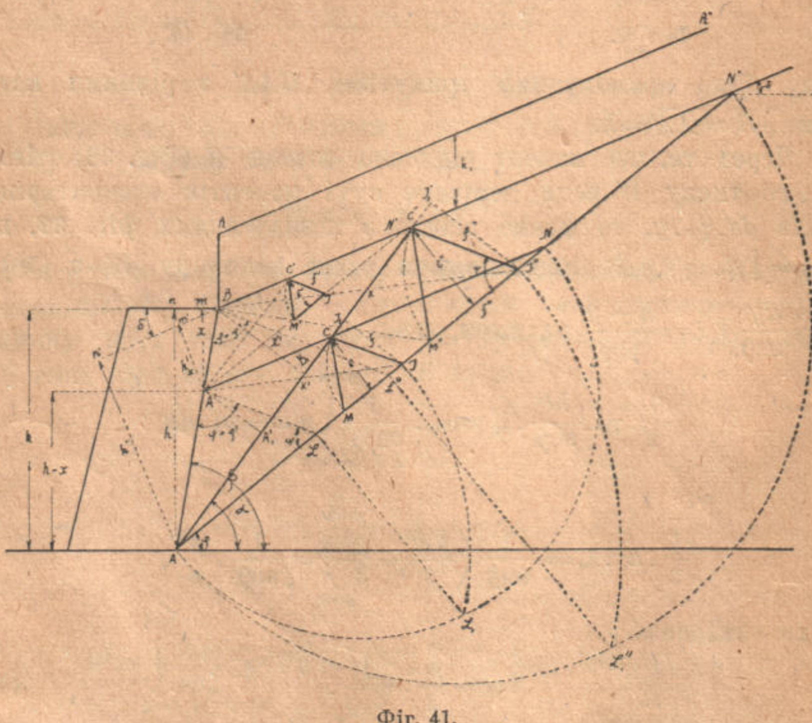
$$\xi_0 = \frac{h}{3}. \tag{55b}$$

Якщо прямовісна віддаль зачепної точки тиску води $W$ від нижньої горизонталі $AD$ при похилій стінці (фіг. 38) є $y_0$, то

$$y_0 = \xi_0 \,.\, \operatorname{sn}\beta = \frac{h}{3}. \tag{55c}$$

## § 12. Залежність між площами зрушення й трикутниками тиску на частинах тієї самої плоскої стінки при плоскій поверхні землі.

Збудуймо для плоскої стінки $AB$ (фіг. 41) заввишки з $h$ площу $AC''$ зрушення й трикутника тиску $C''J''M''$ за Понсле-



Фіг. 41.

Ребганом. Далі візьмімо частину $A'B$ стінки висотою $x$ й розгляньмо цю частину, як самостійну стінку заввишки з $x$; тоді для неї можна збудувати, за Понсле́-Ребганом, площу $A'C'$ зрушення і трикутник $C'J'M'$ тиску; причому напрям природнього укосу для неї буде $A'N' \parallel AN$, що проходить через спід $A'$ цієї стінки. За другою теоремою Понсле́-Ребгана маємо, що $\overline{AJ''}^2 = AL''.AN''$ і $\overline{A'J'}^2 = A'L'.A'N'$; отже

$$\frac{\overline{AJ''}^2}{\overline{A'J'}^2} = \frac{AL''}{A'L'} \cdot \frac{AN''}{A'N'}. \qquad (a)$$

Точки $L'$ та $L''$ лежать на одній напрямній простій $BL''$, тому трикутники $ABL''$ та $A'BL'$ подібні, і

$$\frac{AL''}{A'L'} = \frac{AB}{A'B}; \qquad (b)$$

з подібности трикутників $ABN''$ та $A'BN'$ маємо

$$\frac{AN''}{A'N'} = \frac{AB}{A'B}; \qquad (c)$$

підставляючи в залежність $(a)$ величини відношень $\frac{AL''}{A'L'}$ та $\frac{AN''}{A'N'}$ з $(b)$ та $(c)$, знаходимо, що

$$\frac{\overline{AJ''}^2}{\overline{A'J'}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B}^2},$$

або

$$\frac{AJ''}{A'J'} = \frac{AB}{A'B};$$

з цієї залежности робимо висновок, що точки $J'$ та $J''$ лежать на одній простій $BJ''$. Завдяки цьому легко можна збудувати положення площі $A'C'$ зрушення й трикутник тиску $C'J'M'$ для частини стінки $A'B$ з висотою $x$, зробивши збудування за Понсле́-Ребганом тільки для всієї стінки $AB$: для цього точку $J''$, що ми її отримали збудуванням для стінки $AB$, треба з'єднати з точкою $B$ простою $BJ''$ та визначити точку перетину $J'$ цієї простої з лінією $A'N'$, що була-б рівнобіжна до $AN$ і проходила через точку $A'$; далі треба з точки $J'$ провести просту $J'C' \parallel BL''$ до перетину її в точці $C'$ з лінією $BN''$ землі; таким чином буде визначено площу $A'C'$ зрушення. Відклавши на $A'N'$ відтинок $J'M' = J'C'$ та з'єднавши точку $M'$ з $C'$, матимем трикутника тиску $C'J'M'$ для стінки $A'B$ з висотою $x$.

Через те що $C'J' \parallel C''J''$, маємо з подібности $\triangle\triangle\, J'BC'$ та $J''BC''$, що

$$\frac{BJ''}{BJ'} = \frac{BC''}{BC'}; \qquad (e)$$

з подібности $\triangle\triangle\, ABJ''$ та $A'BJ'$ маємо, що

$$\frac{BJ''}{BJ'} = \frac{AB}{A'B}; \qquad (f)$$

отже з цих двох залежностів $(e)$ та $(f)$ маємо, що

$$\frac{BC''}{BC'} = \frac{AB}{A'B};$$

звідси робимо висновок, що трикутники $ABC''$ та $A'BC'$ подібні, себ-то $AC'' \parallel A'C'$; а тому при плоскій поверхні землі та плоскій стінці для різних частин стінки площі зрушення рівнобіжні.

З рівнораменних трикутників тиску $C'J'M'$ та $C''J''M''$ маємо, що їхні основи $C'M' = 2\,.\,\overline{C'J'}.\operatorname{sn}\frac{\phi}{2}$ та $C''M'' = 2\,.\,\overline{C''J''}.\operatorname{sn}\frac{\phi}{2}$; отже

$$\frac{C'M'}{C''M''} = \frac{C'J'}{C''J''}; \qquad (h)$$

з подібности $\triangle\triangle\, CBJ'$ та $C''BJ''$ маємо залежність

$$\frac{C'J'}{C''J''} = \frac{BC'}{BC''}; \qquad (k)$$

з цих залежностів $(h)$ та $(k)$ знаходимо, що

$$\frac{C'M'}{C''M''} = \frac{BC'}{BC''};$$

з цієї залежности виходить, що $C'M' \parallel C''M''$, а точки $M'$ та $M''$ лежать на одній простій $BM''$. Таким чином ми знайшли, що: 1) трикутники тиску $C'M'J'$ та $C''M''J''$ подібні, і 2) площа зрушення $A'C'$ і трикутник тиску $C'M'J'$ для частини $A'B$ стінки заввишки $x$ збудуються, якщо зробити будування за Понслé-Ребганом **тільки** для всієї стінки $AB$.

З подібних трикутників $J'BC'$ та $J''BC''$ маємо, що

$$\frac{BC''}{B'C} = \frac{C''J''}{C'J'} = \frac{f''}{f'}; \qquad (k)$$

з подібних трикутників $ABC''$ та $A'BC'$ маємо

$$\frac{BC''}{BC'}=\frac{AB}{A'B'}, \qquad (i)$$

з подібних прямокутних трикутників $BnA$ й $BmA'$ маємо

$$\frac{AB}{A'B}=\frac{h}{x}; \qquad (p)$$

отже з залежностів $(i)$ та $(p)$ виходить, що

$$\frac{BC''}{BC'}=\frac{h}{x};$$

порівнюючи цю залежність з залежністю $(k)$, одержимо, що

$$\frac{f''}{f'}=\frac{h}{x};$$

з подібних трикутників тиску $C'J'M'$ та $C''J''M''$ маємо, що

$$\frac{f''}{f'}=\frac{e''}{e'},$$

отже

$$\frac{f''}{f'}=\frac{e''}{e'}=\frac{h}{x}. \qquad (56)$$

З цього бачимо, що **відношення основ та висот трикутників тиску, збудованих для всієї стінки та частини її** (рахуючи від верху $B$ стінки), **дорівнює відношенню відповідних висот усієї стінки та частини її.**

Візьмімо тепер частину $AA'$ стінки заввишки $h-x$ і побудуємо для неї за Понсле́-Ребганом площу зрушення $AC$ та трикутника $CJM$ тиску з основою $MJ=f=CJ$ і висотою $e$. За другою теоремою Понсле́-Ребгана для трикутників тиску $CJM$ та $C''J''M''$ маємо $\overline{AJ}^2=AL.AN$ та $\overline{AJ''}^2=AL''.AN''$; але з трикутників $ALA'$, $ANA'$, $AL''B$ та $AN''B$ маємо, що

$$AL=\overline{AA'}.\frac{\operatorname{sn}(\varphi+\varphi')}{\operatorname{sn}\psi},$$

$$AN=\overline{AA'}.\frac{\operatorname{sn}AA'N}{\operatorname{sn}A'NA},$$

$$AL''=AB.\frac{\operatorname{sn}(\varphi+\varphi')}{\operatorname{sn}\psi}$$

і
$$AN''=AB.\frac{\mathrm{sn}ABN''}{\mathrm{sn}BN''A},$$
отже
$$\overline{AJ}^2=\overline{AA'}^2.\frac{\mathrm{sn}(\varphi+\varphi')}{\mathrm{sn}\psi}.\frac{\mathrm{sn}AA'N}{\mathrm{sn}A'NA}$$
і
$$\overline{AJ''}^2=\overline{AB}^2.\frac{\mathrm{sn}(\varphi+\varphi')}{\mathrm{sn}\psi}.\frac{\mathrm{sn}ABN''}{\mathrm{sn}BN''A},$$
звідки, розділивши почленно, дістанемо
$$\frac{\overline{AJ''}^2}{\overline{AJ}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'A}^2}.\frac{\mathrm{sn}ABN''}{\mathrm{sn}BN''A}.\frac{\mathrm{sn}A'NA}{\mathrm{sn}AA'N};$$
але $A'N \parallel BN''$, тому
$$\angle ABN''=\angle AA'N, \text{ а } \angle BN''A=\angle A'NA,$$
і
$$\frac{\overline{AJ''}^2}{\overline{AJ}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'A}^2}$$
або
$$\frac{AJ''}{AJ}=\frac{AB}{A'A}. \qquad (r)$$

Через те, що за 1-ою теоремою Понсле́-Ребгана поверхня $\triangle ABC''=$ пов. $\triangle AC''J''$, висоти цих трикутників при спільній основі $AC''$ рівні, себ-то $\overline{BB_1}=\overline{J''J_1''}$; але $\overline{BB_1}=\overline{AB}.\mathrm{sn}BAC''$ і $\overline{J''J''_1}=\overline{AJ''}\mathrm{sn}J''AC''$, отже
$$\overline{AB}.\mathrm{sn}BAC''=\overline{AJ''}\mathrm{sn}J''AC''. \qquad (s)$$

Так само через рівність поверхонь $\triangle\triangle AA'C$ і $ACJ$ для стінки $AA'$ (за першою теоремою Понсле́-Ребгана) маємо, що $\overline{A'A_1'}=\overline{JJ_1}$; але що $\overline{A'A'_1}=\overline{A'A}.\mathrm{sn}A'AC$ і $\overline{JJ_1}=\overline{AJ}.\mathrm{sn}JAC$, то
$$\overline{A'A}.\mathrm{sn}A'AC=\overline{AJ}.\mathrm{sn}JAC; \qquad (t)$$
розділивши залежності $(s)$ і $(t)$ почленно, матимем, що
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'A}}.\frac{\mathrm{sn}BAC''}{\mathrm{sn}A'AC}=\frac{\overline{AJ''}}{\overline{AJ}}.\frac{\mathrm{sn}J''AC''}{\mathrm{sn}JAC}$$
або, згідно з відношенням $(r)$ маємо:
$$\frac{\mathrm{sn}BAC''}{\mathrm{sn}A'AC}=\frac{\mathrm{sn}J''AC''}{\mathrm{sn}JAC}. \qquad (u)$$

Коли площі зрушення $AC''$ та $AC$ для всієї стінки $AB$ й частини її $AA'$ утворюють з поземом кути відповідно $\alpha$ та $\alpha'$, то $\angle BAC'' = \beta - \alpha$, $\angle A'AC = \beta - \alpha'$, $\angle J''AC'' = \alpha - \varphi$ і $\angle JAC = \alpha' - \varphi$; а тому, згідно з залежністю ($u$) маємо

$$\frac{\operatorname{sn}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sn}(\beta-\alpha')} = \frac{\operatorname{sn}(\alpha-\varphi)}{\operatorname{sn}(\alpha'-\varphi)},$$

звідки

$$\operatorname{sn}(\beta-\alpha)\,.\,\operatorname{sn}(\alpha'-\varphi) = \operatorname{sn}(\beta-\alpha')\,.\,\operatorname{sn}(\alpha-\varphi);$$

у цій рівності ліва й права частина її складені цілком однаково, відносно $\alpha$ та $\alpha'$, значить, $\alpha = \alpha'$ (те-ж саме матимем і просто, розкривши рівність); таким чином знаходимо, що $\angle BAC'' = \angle A'AC$, себ-то площа зрушення для всієї стінки $AB$ і частини її $AA'$ (рахуючи від нижньої основи $A$) є одна спільна; отже точка $C$ лежить на простій $AC''$.

Через те що $A'C \parallel BC''$ і $CJ \parallel C''J''$, то $\triangle BAC''$ подібний до $\triangle A'AC$ і $\triangle CAJ$ подібний до $\triangle C''AJ''$; а тому маємо

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}}$$

і

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C''J''}}{\overline{CJ}} = \frac{f''}{f};$$

отже

$$\frac{f''}{f} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'A}}.$$

З прямокутних подібних трикутників $nAB$ та $mA'B$ маємо:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{x}{h},$$

або:

$$\frac{\overline{AB} - \overline{A'A}}{\overline{AB}} = \frac{x}{h},$$

звідки

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{AB}} = \frac{h-x}{h};$$

отже з залежности ($v$) знайдемо, що

$$\frac{f''}{f} = \frac{h}{h-x};$$

з подібности трикутників тиску $C''J''M''$ та $CJM$ маємо, що

$$\frac{f''}{f} = \frac{e''}{e},$$

значить,
$$\frac{f''}{f}=\frac{e''}{e}=\frac{h}{h-x}. \tag{57}$$

Із залежностів (56) та (57) одержуємо для частин $A'B$ та $AA'$ стінки:
$$\frac{f'}{f}=\frac{e'}{e}=\frac{x}{h-x}. \tag{58}$$

Проста $BJ''$ перетинає лінію $AC''$ зрушення в точці $k$, тому маємо два прямокутні трикутники $kB_1B$ та $kJ''_1J''$, з рівними катетами (висотами) $BB_1$ та $J''_1J''$ і рівними кутами при точці $k$, отже ці два прямокутні трикутники рівновеликі; а звідси виходить, що $\overline{Bk}=\overline{kJ''}$, себ-то точка $k$ ділить просту $BJ''$ на дві рівні частині. Так само для частини стінки $AA'$ ми знайшли-б, що точка $k'$ ділить просту $A'J$ нарівно, причому згідно з залежністю ($r$) проста $A'J \parallel BJ''$.

## § 13. Визначення тиску землі на навантажену тимчасовою вантагою плоску стінку за допомогою тисків землі на ненавантажені уявні (фіктивні) плоскі стінки.

Припустімо, що ми маємо плоску стінку $AB$ заввишки з $h$ (фіг. 42), навантажену тимчасовою вантагою, що її зведена висота є $h_r$. Якщо проведемо далі просту $AB$ заднього боку даної стінки до перетину в точці $B'$ з лінією тимчасової вантаги, то матимем дві уявні стінки $AB'$ та $BB'$ заввишки $h+k$ та $k$ (фіктивні стінки), що не мають ніякої вантаги; збудуймо для цих уявних стінок та для даної стінки $AB$ трикутники тисків $C''J''M''$ (для стінки $AB'$), $C'J'M'$ (для стінки $BB'$) й $CJM$ (для даної стінки $AB'$) з відповідними основами й висотами $f''$ та $e''$, $f'$ та $e'$, $f$ та $e$. Тиск землі на дану стінку $AB$, як на таку, що має вантагу $h_r$, згідно з виразом (18) § 7 буде
$$E=\frac{1}{2}\cdot f\cdot e\cdot \gamma\left(1+\frac{2\cdot h_r\cdot cs\delta}{h'}\right);$$
з фіг. 42 бачимо, що $h_r\cdot cs\delta=B's=h_1'$; з подібних прямокутних трикутників $B'm'B$ та $BnA$ й $B'B''B$ та $BB_0A$ маємо, що
$$\frac{h_1'}{h'}=\frac{BB'}{AB}$$
і
$$\frac{BB'}{AB}=\frac{BB''}{B_0B}=\frac{k}{h},$$

отже

$$\frac{h_1'}{h'} = \frac{k}{h},$$

через це

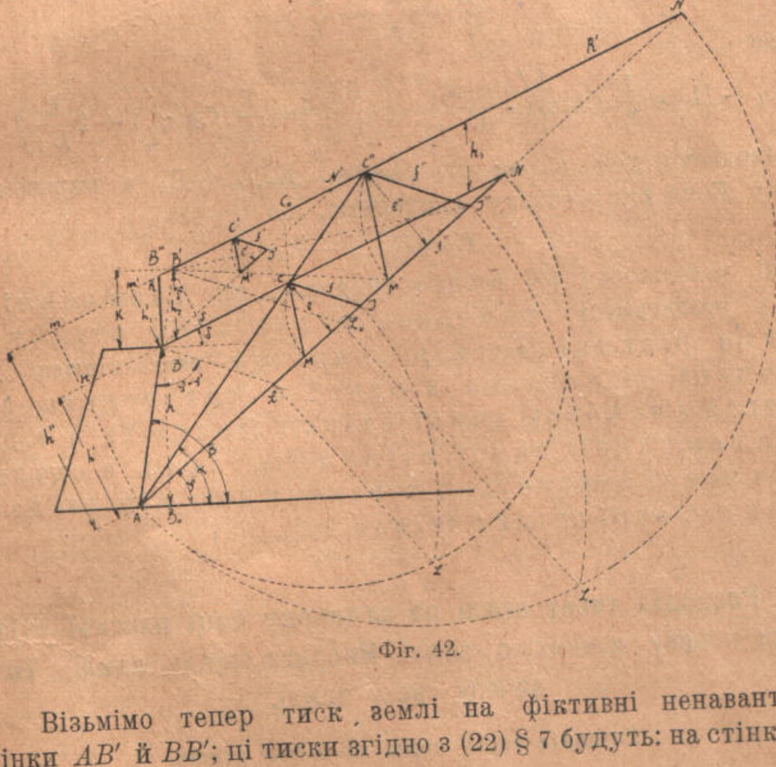
$$h_1' = h' . \frac{k}{h} = h_r . \operatorname{cs}\delta,$$

отже

$$\frac{h_r . \operatorname{cs}\delta}{h'} = \frac{k}{h};$$

а тому тиск землі на навантажену дану стінку $AB$ буде

$$E = \frac{1}{2} f . e . \gamma \left(1 + 2 \frac{k}{h}\right). \qquad (a)$$



Фіг. 42.

Візьмімо тепер тиск землі на фіктивні ненавантажені стінки $AB'$ й $BB'$; ці тиски згідно з (22) § 7 будуть: на стінку $AB'$:

$$E_{h+k} = \frac{1}{2} f'' . e'' . \gamma,$$

а на стінку $BB'$:

$$E_k = \frac{1}{2} f' . e' . \gamma;$$

візьмімо різницю цих тисків $E_{h+k}$ та $E_k$; вона буде

$$E_{h+k} - E_k = \frac{1}{2} . \gamma . (f'' . e'' - f' . e');$$

помноживши й розділивши цю різницю на добуток $f . e$, знайдемо, що

$$E_{h+k} - E_k = \frac{1}{2} . f . e . \gamma \left( \frac{f''}{f} . \frac{e''}{e} - \frac{f'}{f} . \frac{e'}{e} \right);$$

але згідно з формулами (57) та (58) § 12 для фіг. 42 маємо

$$\frac{f''}{f} = \frac{e''}{e} = \frac{h+k}{k}$$

і

$$\frac{f'}{f} = \frac{e'}{e} = \frac{k}{h};$$

отже

$$E_{h+k} - E_k = \frac{1}{2} . f . e . \gamma \left[ \left( \frac{h+k}{h} \right)^2 - \left( \frac{k}{h} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} . f . e . \gamma \left( 1 + 2 \frac{k}{h} \right) \qquad (b)$$

Порівнюючи цей вираз ($b$) різниці $E_{h+k} - E_k$ з виразом ($a$) тиску $E$ на дану стінку, знаходимо, що

$$E = E_{h+k} - E_k; \qquad (c)$$

з цієї залежности ($b$) робимо висновок, що тиск землі на дану навантажену тимчасовою вантагою стінку дорівнює різниці тисків землі на ненавантажені дві фіктивні стінки, що в одної з них основа зливається з основою даної стінки (точка $A$), а в другої з вершиною даної стінки (точка $B$), а спільна лінія землі зливается з вантажною лінією даної навантаженої стінки (лінія $BK'$).

## § 14. Розподіл тиску землі по задньому боці плоскої стінки, беручи плоску поверхню землі. Напруга тиску землі. Точка зачепу тиску землі.

### Розподіл тиску землі по висоті стінки.

Тиск землі на стінку $AB$ (фіг. 43) заввишки $h$, навантажену тимчасовою вантагою $h_r$, згідно з (18) § 7 дорівнює

$$E_h = \frac{1}{2} . f . e \left( 1 + \frac{2 . h_r . cs\delta}{h'} \right) . \gamma;$$

а тиск на стінку $A'B$, заввишки $x$ (фіг. 43), навантажену тією самою вантагою $h_r$, буде

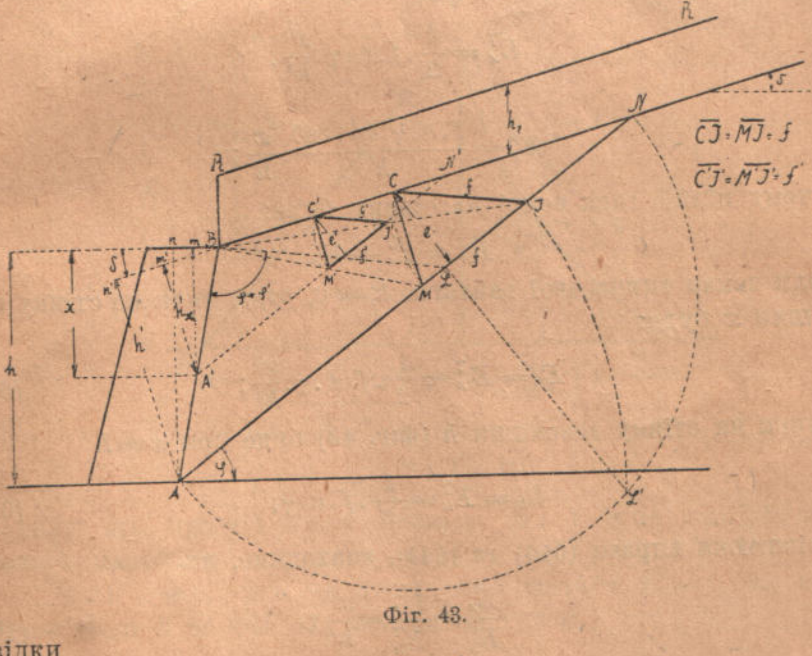
$$E_x = \frac{1}{2} \cdot f' \cdot e' \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot cs\delta}{h'_x}\right) \cdot \gamma \cdot \tag{59}$$

З подібних прямокутних трикутників $BmA'$ та $BnA$ і $Bm'A'$ та $Bn'A$ маємо

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{mA'}{nA} = \frac{x}{h}$$

та

$$\frac{AB'}{BA} = \frac{h'_x}{h'},$$




Фіг. 43.

звідки

$$\frac{x}{h} = \frac{h'_x}{h'}. \tag{60}$$

Отже

$$h'_x = h' \cdot \frac{x}{h}. \tag{60a}$$

Згідно з формулою (56) § 12 для фіг. 43 матимем: $\dfrac{f}{f'} = \dfrac{e}{e'} = \dfrac{h}{x}$ (порівн. фіг. 43 та 41); отже $f' = f \cdot \dfrac{x}{h}$ і $e' = e \cdot \dfrac{x}{h}$. Ставлячи значіння $f'$, $e'$ та $h'_x$ до виразу (59) тиску землі на стінку $A'B$, заввишки $x$, матимемо:

$$E_x = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma \cdot \frac{x^2}{h^2}\left(1 + \frac{2 \cdot h_r \cdot \operatorname{cs}\delta}{h'} \cdot \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma \cdot \frac{x^2}{h^2} +$$

$$+ \frac{f \cdot e \cdot \gamma \cdot h_r \cdot \operatorname{cs}\delta}{h'} \cdot \frac{x}{h}. \tag{61}$$

Другий член цього виразу (61) має величину $h_r$, що характеризує собою навантаження поверхні землі, отже цей другий член залежить тільки від тимчасової вантаги; позначімо його через $E_x^p$. Перший член, що має в собі тільки величину $\gamma$ — вагу одиниці об'єму землі, залежить тільки від тиску засипаної за стінкою землі; позначімо його $E_x^\gamma$ Отже:

$$E_x^\gamma = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma \cdot \frac{x^2}{h^2}. \tag{62}$$

і

$$E_x^p = \frac{f \cdot e \cdot \gamma \cdot h_r \cdot \operatorname{cs}\delta}{h'} \cdot \frac{x}{h}; \tag{63}$$

а тому цілий тиск землі на стінку буде:

$$E_x = E_x^\gamma + E_x^p. \tag{64}$$

Коли немає тимчасової вантаги, $h_r = 0$, отже тиск на стінку заввишки $x$ буде:

$$E_x = E_x^\gamma = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma \cdot \frac{x^2}{h^2}; \tag{64a}$$

а тиск на стінку заввишки $h$ (фіг. 43) буде при $x = h$

$$E_h = E_h^\gamma = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma; \tag{64b}$$

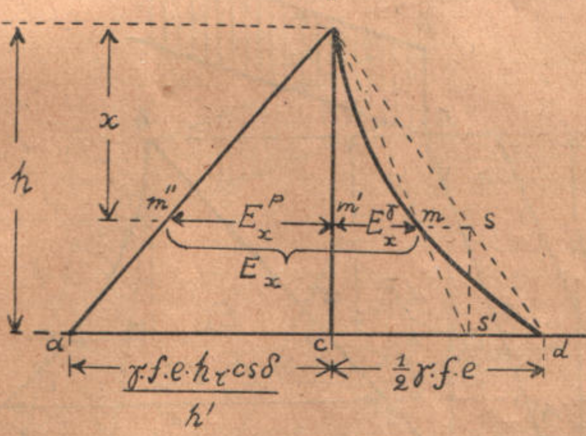
порівнюючи вирази (64$a$) та (64$b$), знаходимо, що

$$\frac{E_x}{E_h} = \frac{E_x^\gamma}{E_h^\gamma} = \frac{x^2}{h^2}; \tag{65}$$

звідси виводимо, що, коли стінка **не навантажена**, то тиски на частину стінки та на всю стінку відносяться, як квадрати їхніх висот.

З виразів (62) та (63) окремих тисків $E_x^\gamma$ та $E_x^p$ видко, що тиск землі $E_x^\gamma$ змінюється зо зміною $x$ за законом параболи другого порядку, а тиск $E_x^p$ од тимчасової вантаги змінюється за законом простої лінії. Коли $x = 0$, тиск $E_x^\gamma = 0$, що відповідає точці $b$ на фіг. 44; коли $x = h$, тиск $E_x^\gamma = \frac{1}{2} \cdot f \cdot e \cdot \gamma = E_h^\gamma = \overline{cd}$, що відповідає точці $d$ на фіг. 44; отже парабола другого порядку проходить через точки $b$ та $d$ (фіг. 44), причому точка $b$ є вершина параболи; тиск землі на стінку $A'B$ (фіг. 43) заввишки $x$, себ-то тиск на віддалі $x$ од вершка $B$ стінки (фіг. 43), позначатиметься відтинком $m'm$ (фіг. 44).

Щоб збудувати положення якоїсь точки $m$ параболи (фіг. 44), робимо так: з'єднуємо вершок $b$ параболи з точкою $d$ її простою $bd$, на віддалі $x$ од вершка $b$ проводимо позему $m's$ до перетину її в точці $s$ з простою $bd$, через точку $s$ проводимо сторчову лінію до перетину її в точці $s'$ з поземою $cd$, а точку $s'$ з'єднуємо з вершком $b$ простою $s'b$; тоді точка $m$ пе-




Фіг. 44.

ретину цієї простої $s'b$ з поземою $m's$ і буде відшукуваною точкою параболи.

Коли $x = 0$, тиск од тимчасової вантаги $E_x^p = 0$, що відповідає точці $b$ на фіг. 44; коли $x = h$, тиск

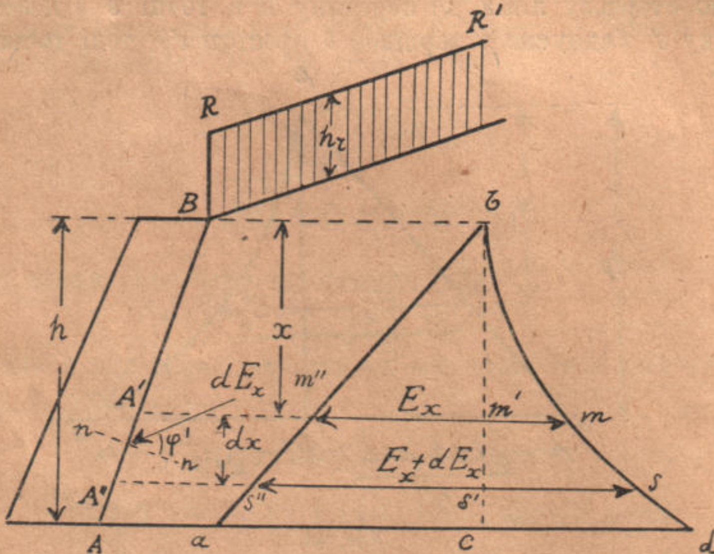
$$E_x^p = E_h^p = \frac{f.e.\gamma.h_r.\mathrm{cs}\delta}{h'} = \overline{ac},$$

що відповідає точці $a$ на фіг. 44; отже простою, що показує закон зміни $E_x^p$ із зміною висоти $x$, буде лінія $ab$; тиск од тимчасової вантаги на стінку $A'B$ (фіг. 43) заввишки $x$, на фіг. 44 позначиться відтинком $m''m'$. Цілий тиск землі та тимчасової вантаги на стінку $A'B$ (фіг. 43) заввишки $x$ на фіг. 44 позначиться відтинком $m''m = m''m' + m'm$; це й буде тиск землі $E_x$ на навантажену вантагою $h_r$ стінку $A'B$, заввишки $x$. А цілий тиск землі й тимчасової вантаги на стінку $AB$ (фіг. 43 та 44) заввишки $h$, коли $x = h$, згідно з (61) дорівнюватиме:

$$E_h = \frac{1}{2} f.e.\gamma + \frac{f.e.h_r.cs\delta}{h'}; \tag{66}$$

але $\frac{1}{2} f.e.\gamma = \overline{cd} = E_h^\gamma$, а $\frac{f.e.h_r.cs\delta}{h'} = \overline{ac} = E_h^p$, отже цілий тиск

$$E_h = E_h^\gamma + E_h^p = \overline{cd} + \overline{ac} = \overline{ad} \text{ (фіг.) } 44.$$




Фіг. 45.

Таким чином цілий тиск на навантажену вантагою $h_r$ стінку $AB$ (фіг. 43), заввишки $h$, покаже відтинок $\overline{ad}$ (фіг. 44).

### Напруга земляного тиску.

Коли тиск землі на навантажену стінку $A'B$ (фіг. 45) заввишки $x$ є $E_x$, то тиск на стінку $A''B$ заввишки $x + dx$ буде $E_x + dE_x$; отже тиск на елемент стінки $A''A'$ заввишки $dx$, дорівнює $(E_x + dE_x) - E_x$, себ-то $dE_x$; стінка має довжину 1 (одиниця) в напрямові нормальнім до площі рисунку, через це $dE_x$ є тиск на стінку з поверхнею $A''A'$. 1 квадр. один.; а тиск на одиницю поверхні стінки буде $\frac{dE_x}{dx}$, що й можна назвати напругою земляного тиску; назвемо його $q_x$, тоді маємо

$$\frac{dE_x}{dx} = q_x \,. \tag{67}$$

Якщо в виразі (61) сучинники при $x^2$ та $x$ позначити:

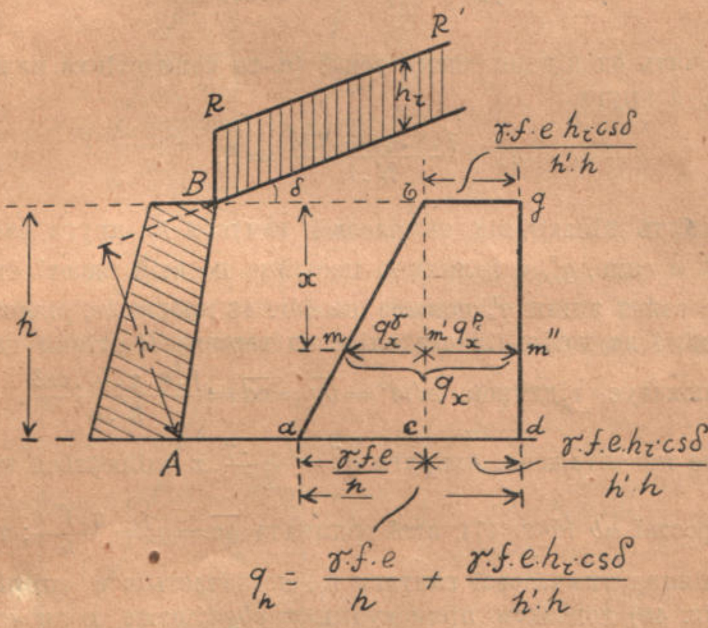
$$A = \frac{1}{2} . f . e . \frac{\gamma}{h^2} ,$$

а

$$B = \frac{f . e . \gamma . h_r \, cs\delta}{h' . h} ,$$

то ми можемо написати тиск землі на стінку заввишки $x$ у такій формі:

$$E_x = Ax^2 + Bx; \tag{68}$$




Фіг. 46.

тоді напруга тиску землі буде:

$$q_x = \frac{dE_x}{dx} = 2\,Ax + B \tag{69}$$

або

$$q_x = f . e . \gamma . \frac{x}{h^2} + \frac{f . e . \gamma . h_r . cs\delta}{h' . h} . \tag{69a}$$

З виразів (69) та (69$a$) для $q_x$ видко, що напруга тиску землі $q_x$ змінюється по висоті стінки, за законом простої лінії. Коли

$x=0$ (фіг. 46), напруга тиску землі $q_x = B = \frac{f.e.\gamma.h_r.\mathrm{cs}\delta}{h'.h} =$ $= \overline{bg}$ (фіг. 46), щò відповідає вершкові $B$ стінки; коли $x=h$, величина $q_x = q_h = 2.A.h + B = \frac{\gamma.f.e}{h} + \frac{\gamma.f.e.h_r.\mathrm{cs}\delta}{h'.h} = \overline{ad}$ (фіг. 46), щó відповідає основі $A$ стінки; отже проста, за якою змінюється напруга $q_x$, є проста $\overline{ab}$.

Напруга $q_x$ тиску землі, як це видко з його виразу (69$a$), складається з двох частин; одна частина є:

$$q_x^{\gamma} = \frac{f.e.\gamma}{h^2}.x = 2Ax,$$

що залежить од діяння тиску землі (с.-то коли стінка не навантажена), а друга

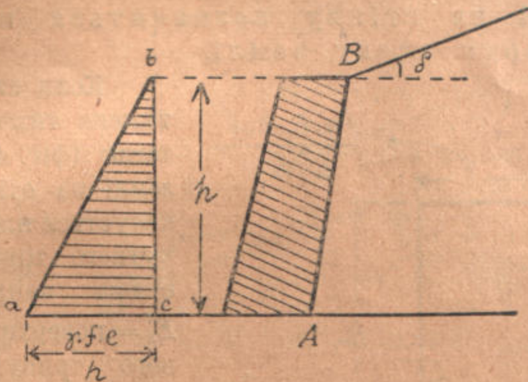
$$q_x^{p} = \frac{f.e.\gamma.h_r.\mathrm{cs}\delta}{h'.h} = B,$$

що залежить тільки від тимчасової вантаги $h_r$; друга частина напруги, а саме, $q_x^p$, є величина постійна по всій висоті стінки, через це закон зміни $q_x^p$ покаже на фіг. 46 проста $bc$, рівнобіжна до оси $gd$; і на довільній віддалі $x$ од вершка $B$ стінки цю напругу показує відтинок $m'm'' = \overline{bg} = \overline{cd} = \frac{f.e.\gamma.h_r.\mathrm{cs}\delta}{h'.h}$. Коли стінка не навантажена, напруга $q_x^{\gamma} = \frac{f.e.\gamma}{h^2}.x$ змінюється за законом простої $ab$ (фіг. 47), якої ордината $\overline{ac} = q_x^{\gamma} = \frac{\gamma.f.e}{h}$; таким чином, діяння тимчасової вантаги $h_r$, позначається в епюрі напруг (фіг. 46) додатком прямокутника $cbgd$; отже коли стінка навантажена тимчасовою вантагою, епюра напруг земляного тиску матиме вигляд трапезу $abgda$ (фіг. 46), а коли стінка не навантажена, ця епюра виглядатиме як прямокутний трикутник $bca$ (фіг. 47). Коли стінка не навантажена (фіг. 46), напруга $q_x$ тиску землі на будь-якій віддалі $x$ од вершка $B$ стінки (фіг. 46) показує відтинок $\overline{mm''} = \overline{mm'} + \overline{m'm''} = q_x^{\gamma} + q_x^{p}$.

Коли в епюрі напруг тиску землі (фіг. 48) проведемо через точку $g$ просту $gc' \parallel ab$, то матимем рівнобіжник $bgc'a$, рівний (поверхнею) з прямокутником $bgdc$, бо $\overline{ac'} = \overline{bg}$; до того, ми матимемо ще прямокутний трикутник $gdc'$, якого основа

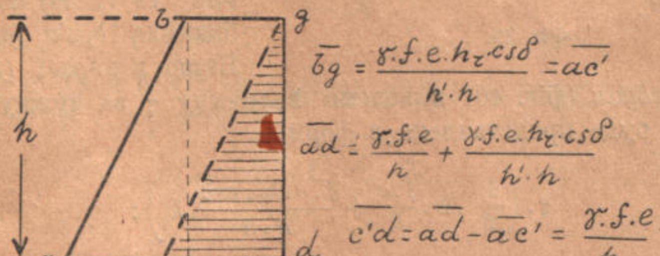
$\overline{c'd} = \overline{ad} - \overline{ac'} = \frac{\gamma . f . e}{h} + \frac{\gamma . f . e . h_r . cs\delta}{h' . h} - \frac{\gamma . f . e . h_r . cs\delta}{h' . h} = \frac{\gamma . f . e}{h}$, але

$\frac{\gamma . f . e .}{h}$ є величина основи $\overline{ac}$ прямокутного трикутника на фіг. 46 з тією самою висотою $h$, отже $\overline{c'd} = \overline{ac}$, себ-то трикутник $gdc'$




Фіг. 47.

на фіг. 48 є той самий трикутник, що й трикутник $bca$ на фіг. 46. Виходить, що діяння тимчасової вантаги можна представити рівнобіжником $bgc'a$ в епюрі напруг на фіг. 48; епюра-ж напруг




Фіг. 48.

од діяння самої землі, себ-то коли стінка не навантажена, матиме вигляд прямокутного трикутника $gdc'$, рівного з прямокутним трикутником $bca$ на фіг. 46.

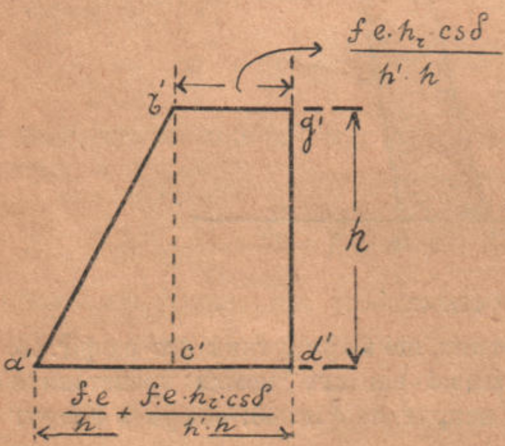
Коли ми візьмемо трапез $abgda$ (фіг. 46) епюри напруг тиску землі, то, як бачимо з фіг. 46,

$$\text{пов. трапезу } abgda = \frac{1}{2} . h . \frac{\gamma . f . e}{h} + \frac{\gamma . f . e . h_r . cs\delta}{h' . h} . h. \quad (69)$$

Коли вираз (66) для тиску землі на навантажену стінку заввишки $h$, помножити й поділити на $h$, то матимем

$$E_h = \frac{1}{2} . h . \frac{\gamma . f . e}{h} + \frac{\gamma . f . e . h_r . \mathrm{cs}\delta}{h' . h} . h;$$

порівнюючи цей вираз для $E_h$ з величиною (69) поверхні трапезу епюри тисків, бачимо, що $E_h =$ пов. трапезу $abgda$; отже, цілий тиск землі на стінку позначиться поверхнею епюри напруг тиску землі.




Фіг. 49.

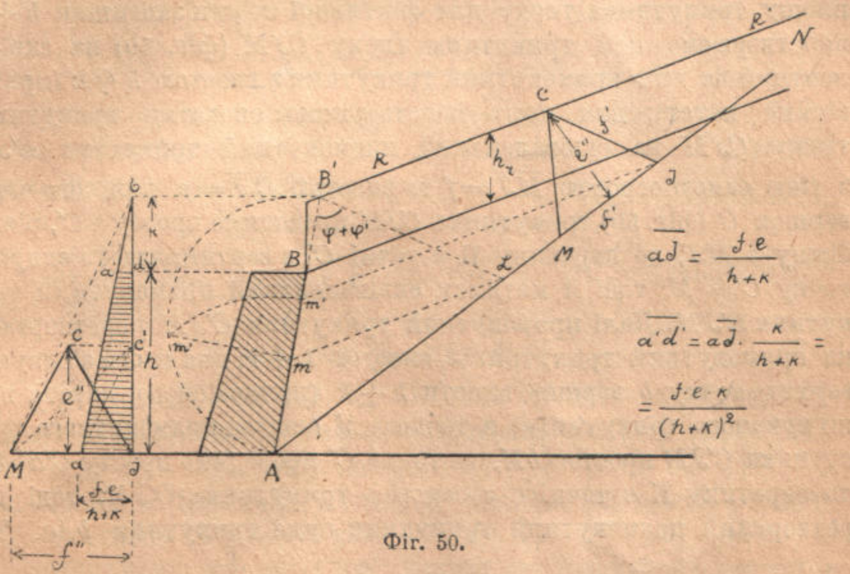
Коли стінка навантажена тимчасовою вантагою (фіг. 47), то тиск землі на стінку $E_h^{\gamma}$ показується площею прямокутного трикутника $bca$ епюри напруг, себ-то $E_h^{\gamma} =$ поверхні прямокутного трикутника $bca$; а тиск землі $E_h^p$ тільки від тимчасової вантаги $h_r$ представиться поверхнею прямокутника $bgdc$ (фіг. 46 та 48) або рівнобіжника $bgc'a$ (фіг. 48). Якщо в виразі (69) пов. трапезу $abgda$ (фіг. 46) введемо величину $\gamma$ за дужку, то ця поверхня буде представлена в формі

$$\gamma . \left( \frac{1}{2} . h . \frac{f . e}{h} + \frac{f . e . h_r . \mathrm{cs}\delta}{h' . h} . h \right);$$

але дужка цього виразу являє собою пов. трапезу $a'b'g'd'a'$ на фіг. 49 з висотою $h$ й рівнобіжними боками $\overline{b'g'} = \frac{f . e . h_r . \mathrm{cs}\delta}{h' . h}$ та $\overline{a'd'} = \frac{f . e}{h} + \frac{f . e . h_r . \mathrm{cs}\delta}{h' . h}$.

Отже, щоб одержати величину тиску землі на навантажену тимчасовою вантагою $h_r$ стінку, треба збудувати трапеза $a'b'g'd'a'$ (фіг. 49) і поверхню його помножити на вагу одиниці об'єму землі $\gamma$.

Але замість будувати трапез *abgda* (фіг. 46), або *a'b'g'd'a'* (фіг. 49), щоб одержати тиск землі на навантажену стінку, можна скористуватися з тисків землі на фіктивні ненавантажені стінки (див. § 13). Для цього, провівши лінію $AB$ (фіг. 50) даної стінки заввишки $h$ до перетину в точці $B'$ з лінією навантаження $h_r$, визначаємо дві фіктивні стінки $AB'$ з висотою $h+k$ та $BB'$




Фіг. 50.

з висотою $k$. Тиск землі на ненавантажену фіктивну стінку $AB$ згідно з (22) § 7 дорівнює

$$E_{h+\kappa} = \frac{1}{2} \cdot f'' \cdot e'' \cdot \gamma,$$

де $f''$ та $e''$ це основа й висота трикутника тиску $CJM$ (фіг. 50), збудованого за Понслé-Ребганом для стінки $AB'$ заввишки $h+k$. Тиск землі на ненавантажену фіктивну стінку $BB'$ заввишки $k$ можна визначити, згідно з (65) § 14, із залежности:

$$\frac{E_\kappa}{E_{h+\kappa}} = \frac{k^2}{(h+k)^2},$$

себ-то

$$E_\kappa = E_h \cdot \frac{k^2}{(h+k)^2} = \frac{1}{2} \cdot f'' \cdot e'' \cdot \gamma \cdot \frac{k^2}{(h+k)^2};$$

отже, згідно з § 13, цілий тиск землі на навантажену тимчасовою вантагою $h_r$ стінку $AB$ заввишки $x$ рівнятиметься

$$E_h = E_{h+\kappa} - E_\kappa = \gamma \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f'' \cdot e'' - \frac{1}{2} \cdot f'' \cdot e'' \cdot \frac{k^2}{(h+k)^2}\right]. \tag{70}$$

Перший член $\frac{1}{2} \cdot f'' \cdot e''$ у дужках цього виразу являє собою площу трикутника тиску для фіктивної стінки заввишки $h + k$; перетворюємо цей трикутник тиску $CJM$ (фіг. 50) на еквівалентний із ним прямокутний трикутник з висотою $h + k$ (прямовісний катет); для цього перетворюємо спочатку трикутника тиску $CJM$ на еквівалентний прямокутний трикутник $C'JM$ з тією самою основою $\overline{MJ} = f$ та висотою $\overline{C'J} = e$, для чого через вершок $C$ (фіг. 50) трикутника $CJM$ проводимо просту $CC'$, рівнобіжну з $MJ$, до перетину її в точці $C'$ з вертикаллю і з'єднуємо точку $C'$ з $M$; тоді й матимем еквівалентний прямокутний трикутник $C'JM$. Далі прямокутний трикутник $C'JM$ перетворюємо на прямокутний трикутник з висотою $h + k$; для цього з'єднуємо верхню точку $b$ вершка висоти $h + k$ (прямовісного катета відшукуваного трикутника) з точкою $M$ основи прямокутного трикутника $C'JM$ простою $bM$, а з точки $C'$ проводимо просту $C'a \parallel bM$ до перетину її в точці $a$ з основою трикутника $C'JM$; тоді перетворений прямокутний трикутник буде трикутник $bJa$. Таким чином перший член $\frac{1}{2} \cdot f'' \cdot e''$ в дужці виразу (70) являє собою площу прямокутного трикутника $bJa$ (фіг. 50) з висотою $h + k$; основу $aJ$ цього прямокутного трикутника $bJa$ ми матимем з подібних трикутників $bJM$ та $C'JM$ із залежностів:

$$\frac{\overline{aJ}}{\overline{MJ}} = \frac{\overline{C'J}}{\overline{bJ}}$$

або

$$\overline{aJ} = \overline{MJ} \cdot \frac{\overline{C'J}}{\overline{bJ}} = \frac{f \cdot e}{h+k}.$$

Через те, що $\frac{1}{2} \cdot f'' \cdot e'' =$ пов. прямокутного трикутника $bJa$, ми можемо вираз (70) для $E_h$ написати в такій формі:

$$E_h = \gamma \cdot \left[\triangle bJa - \triangle bJa \cdot \frac{k^2}{(h+k)^2}\right]. \tag{70a}$$

Якщо ми в прямокутному трикутникові $bJa$ на віддалі $k$ від його вершка $b$ проведемо просту $a'd' \parallel ad$, то матимем прямокутний трикутник $bd'a'$, подібний до трикутника $bJa$; з подібности цих прямокутних трикутників $bd'a'$ та $bJa$ маємо, що

$$\frac{\text{пов. } \triangle b'd'a'}{\text{пов. } \triangle bJa} = \frac{\overline{bd'}^2}{\overline{bJ}^2} = \frac{k^2}{(h+k)^2},$$

звідки

$$\triangle bd'a' = \triangle bJa \cdot \frac{k^2}{(h+k)^2};$$

отже другий член у дужці виразу ($70a$) являє собою пов. прямокутного трикутника $bd'a'$; таким чином, тиск землі на навантажену стінку висотою $h$ буде:

$$E_h = \gamma \cdot [\triangle bJa - \triangle bd'a'] . \qquad (70b)$$

Але різниця $\triangle bJa - \triangle bd'a'$ є пов. трапезу $a'd'Ja$ (зарисованого на фіг. 50); отже

$$E_h = \gamma . \text{ пов. трапезу } a'd'Ja . \qquad (70c)$$

З цієї залежности ($70c$) ми матимем графічно величину тиску землі на навантажену тимчасовою вантагою стінку заввишки $h$ таким способом: продовжуємо задній бік сторони $AB$ (фіг. 50) даної стінки до перетину в точці $B'$ з лінією $RR'$ вантаги й одержуємо фіктивну ненавантажену стінку $AB'$, що для неї будуємо трикутника тиску $CJM$ одним із зазначених способів в § 9 (за Понсле́-Ребганом); далі цей трикутник тиску перетворюємо на прямокутний трикутник $bJa$ з висотою, рівною висоті фіктивної стінки $BB'$ (в лівій частині фіг. 50) і через вершок $B$ даної стінки $AB$ проводимо просту, рівнобіжну до основи $aJ$ цього трикутника (катета); тоді ця проста відтинає від трикутника $bJa$ трапез $a'd'Ja$; пов. цього трапезу $a'd'Ja$, помножена на вагу одиниці обсягу землі $\gamma$, дасть нам тиск землі на навантажену стінку $AB$.

Точніше можна представити відшукуваний тиск землі на навантажену стінку $AB$ вагою земляної призми з основою в формі трапезу $a'd'Ja$ та висотою рівною одиниці (в напрямові нормальному до площі рисунку); отже

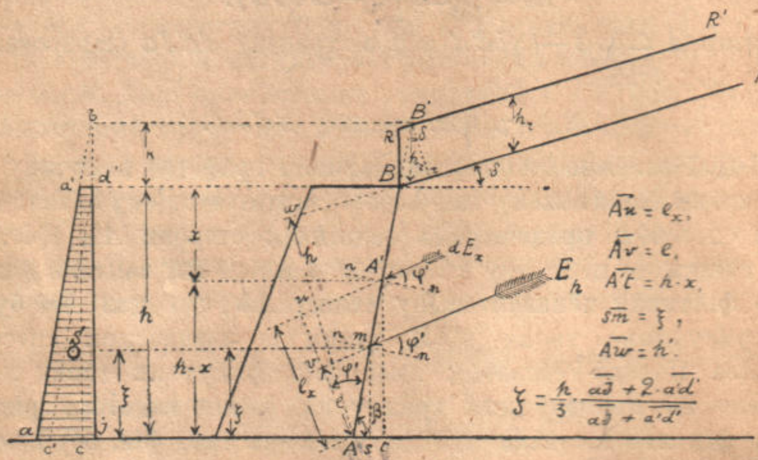
$$E_h = \gamma . \text{пов. трапезу } a'd'Ja . 1;$$

відкинувши тут чинника 1, маємо вираз ($70c$), виводячи який, чинника 1 зарані відкинуто.

Коли ми проводили на фіг. 50 через вершок $B$ даної стінки просту, рівнобіжну з основою $aJ$ прямокутного трикутника $bJa$, що відтинає від нього трапез $a'd'Ja$, то цим самим ми віднімали від трикутника $bJa$ малий прямокутник $bd'a'$. Але цей прямокутний трикутник $bd'a'$ є перетворений трикутник тиску, збудований для фіктивної ненавантаженої стінки $BB'$ з висотою, рівною висоті вантажної лінії $RR'$; але в дійсності такої фіктивної стінки $BB'$ нема, через це ми й відкидаємо цей фіктивний трикутник $bd'a'$.

### Точка зачепу земляного тиску.

Якщо в точці $A'$ (фіг. 51) на віддалі $x$ од вершка стінки елементарний тиск землі є $dE_x$, то момент цього тиску відносно



Фіг. 51.

точки $A$ основи стінки дорівнює $dE_x \cdot e_x$; а цілий момент відносно точки $A$ всіх елементарних тисків, що їх ми узяли по всій висоті $h$ стінки, дорівнює

$$\int_{x=0}^{x=h} dE_x \cdot e_x.$$

Момент рівнодійної $E_h$ усіх елементарних тисків $dE_x$, або инакше кажучи цілого тиску землі на стінку $AB$ відносно тієї самої точки $A$ дорівнює $= E_h \cdot e$; отже

$$E_h \cdot e = \int_{x=0}^{x=h} dE_x \cdot e_x. \tag{71}$$

З прямокутних трикутників $A'uA$ та $A'tA$ маємо, що

$$e_x = \overline{Au} = \overline{AA'} \,.\, \mathrm{cs}\varphi'$$

і

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{A't}}{\mathrm{sn}\beta} = \frac{h-x}{\mathrm{sn}\beta};$$

отже

$$e_x = \frac{h-x}{\mathrm{sn}\beta} \,.\, \mathrm{cs}\varphi'.$$

З прямокутних трикутників $mvA$ та $msA$ маємо, що

$$e = \overline{Av} = \overline{Am} \,.\, \mathrm{cs}\varphi'$$

і

$$\overline{Am} = \frac{\overline{sm}}{\mathrm{sn}\beta} = \frac{\xi}{\mathrm{sn}\beta};$$

отже

$$e = \frac{\xi}{\mathrm{sn}\beta} \,.\, \mathrm{cs}\varphi'.$$

Підставляючи знайдені величини $e_x$ та $e$ у залежність (71), матимем, що

$$\xi \,.\, E_h = \int_{x=0}^{x=h} (h-x) \,.\, dE_x. \tag{71a}$$

Ставлячи в цю рівність (71$a$) величину $E_h$ із (68) при $x=h$ та $dE_x$ із (69), знайдемо, що

$$\xi \,.\, (A \,.\, h^2 + B \,.\, h) = \int_{x=0}^{x=h} (2\,Ax + B) \,.\, (h-x) \,.\, dx;$$

звідси прямовісна віддаль $\xi$ від споду стінки точки $m$ зачепу тиску $E_h$ землі на стінку дорівнює:

$$\xi = \frac{1}{6} \,.\, \frac{3B \,.\, h + 2A \,.\, h^2}{Ah + B};$$

ставлячи сюди раніш показані величини $A = \frac{1}{2} \,.\, f \,.\, e \,.\, \gamma \,.\, \frac{1}{h^2}$ та $B = \frac{f \,.\, e \,.\, \gamma \,.\, h_r \,.\, \mathrm{cs}\delta}{h' \,.\, h}$, матимем, що:

$$\xi = \frac{h}{3} \,.\, \frac{3 \,.\, h_r \,.\, \mathrm{cs}\delta + h'}{2 \,.\, h_r \,.\, \mathrm{cs}\delta + h'}. \tag{72}$$

Розділивши чисельника і знаменика цього виразу (72) на $h'$, матимем, що

$$\xi = \frac{h}{3} \cdot \frac{\frac{3h_r \cdot cs\delta}{h'} + 1}{\frac{2h_r \cdot cs\delta}{h'} + 1};$$

але з фіг. 42 та 51 маємо

$$\frac{h_r \cdot cs\delta}{h'} = \frac{k}{h},$$

отже

$$\xi = \frac{h}{3} \cdot \frac{3 \cdot \frac{k}{h} + 1}{2 \cdot \frac{k}{h} + 1} \qquad (a)$$

З прямокутних трикутників тиску $bJa$ та $bd'a'$ (фіг. 51 та 50), збудованих для фіктивних стінок $AB'$ та $BB'$, маємо, що

$$\frac{\overline{aJ}}{\overline{a'd'}} = \frac{h+k}{k} = \frac{h}{k} + 1,$$

звідки

$$\frac{h}{k} = \frac{\overline{aJ} - \overline{a'd'}}{\overline{a'd'}},$$

або

$$\frac{k}{h} = \frac{\overline{a'd'}}{\overline{aJ} - \overline{a'd'}};$$

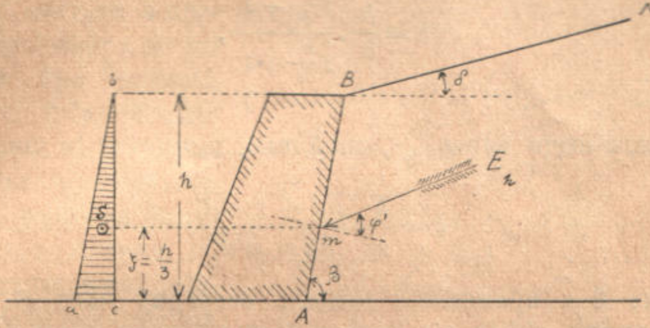
це значіння $\frac{k}{h}$ ставимо в рівність ($a$) і маємо, що

$$\xi = \frac{h}{3} \cdot \frac{\overline{aJ} + 2 \cdot \overline{a'd'}}{\overline{aJ} + \overline{a'd'}};$$

але цей вираз $\xi$ являє собою прямовісну віддаль осередка ваги $S$ трапезу тиску $a'd'Ja$ (фіг. 51 та 50) від основи його $aJ$; таким чином точка зачепу тиску землі $E_k$ на навантажену тимчасовою вантагою стінку лежить на висоті осередка ваги трапезу тиску.

Якщо поверхня землі не навантажена, то $h_r = 0$, отже за (72) буде $\xi = \frac{h}{3}$, себ-то точка зачепу земляного тиску $E_h$ на стінку лежить на висоті осередку ваги $S$ прямокутного трикутника $bca$ тиску (фіг. 52).

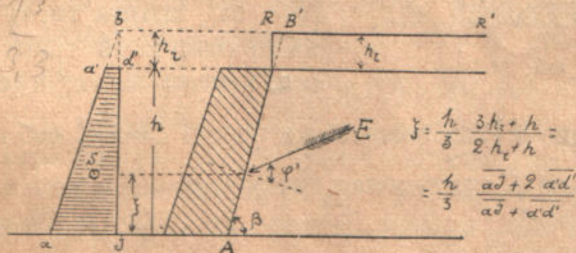
Те, що на поверхню землі немає навантаження $h_r$ змінює трапез тиску $a'd'Ja$ (фіг. 51) на прямокутний трикутник $bca$ тиску (фіг. 52), віднімаючи від нього прямокутник $a'd'Jc$ (фіг. 51), або рівний з ним рівнобіжник $a'd'c'a$; причому прямокутний трикутник $abc$ на фіг. 52 є той самий, що й на фіг. 51 прямокутний трикутник $a'ca$ або $d'Jc'$; таким чином діяння самої




Фіг. 52.

тимчасової вантаги виявляється прямокутником $a'd'Jc$ або рівним з ним рівнобіжником $a'd'c'a$ (фіг. 51). Коли стінка не навантажена (фіг. 52), тиск землі на стінку дорівнює

$$E_h = \gamma \,.\, \triangle bca \,. \tag{73}$$




Фіг. 53.

Коли лінія землі позема (фіг. 53), то $h' = h$ і $\delta = 0$, отже $\cos\delta = 1$, і тому за (72) маємо:

$$\xi = \frac{h}{3} \cdot \frac{3 \,.\, h_r + h}{2 \,.\, h_r + h} \,. \tag{74}$$

З прямокутних трикутників $bJa$ та $bd'a'$ (фіг. 53) маємо, що

$$\frac{\overline{aJ}}{\overline{a'd'}} = \frac{h_r + h}{h_r} = 1 + \frac{h}{h_r},$$

звідки

$$\frac{h_r}{h}=\frac{\overline{a'd'}}{\overline{aJ}-\overline{a'd'}};$$

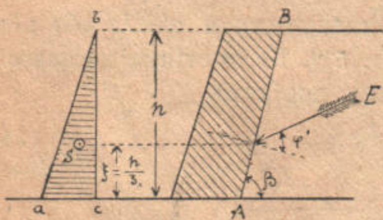
розділивши на $h$ чисельника й знаменика в (74), матимем

$$\xi=\frac{h}{3}\cdot\frac{3\frac{h_r}{h}+1}{2\frac{h_r}{h}+1},$$

поставивши сюди вираз $\frac{h_r}{h}$, знайдемо, що

$$\xi=\frac{h}{3}\cdot\frac{\overline{aJ}+2.\overline{a'd'}}{\overline{aJ}+\overline{a'd'}};$$

а це саме й є прямовісна віддаль осередку ваги $S$ (фіг. 53) трапезу тиску $a'd'Ja$ від основи його $aJ$; отже вираз (74) для $\xi$ знову показує, що точка зачепу тиску землі $E$ на стінку лежить на висоті осередку ваги тискового трапезу.



Фіг. 54.

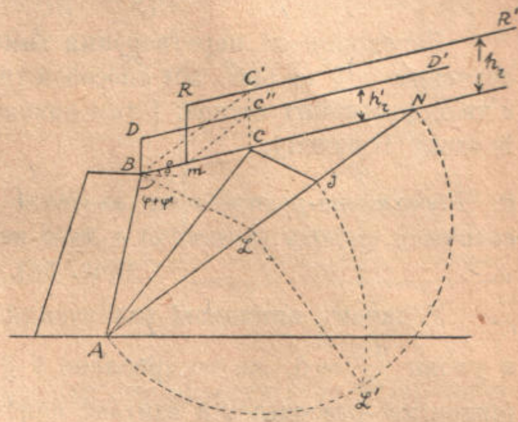
Коли немає вантаги на поземій площі землі, маємо $h_r=0$ (фіг. 54); трапез тиску змінюється на прямокутний трикутник тиску $bca$, і точка зачепу тиску землі на стінку, згідно з (74,) лежить на висоті $\xi=\frac{h}{3}$, себ-то на висоті осередку ваги $S$ трикутника тиску $bca$.

## § 15. Різні випадки тимчасової вантаги при плоскій стінці та плоскій поверхні землі.

Визначаючи положення площі зрушення навантаженої тимчасовою вантагою стінки, ми беремо на увагу вагу земляної призми $ABRC_0C$ (фіг. 42), себ-то вагу саме земляної призми зрушення $ABC$ і зведену до землі тимчасову вантагу, що розміщена вдовж $BC$, себ-то над призмою зрушення; таким чином у тискові на стінку $AB$ бере участь тільки тимчасова вантага впродовж $BC$, а вантага справа від $C$ жадного тиску на стінку не чинить.

*1. Тимчасову рівномірно-розподілену вантагу розміщено не на всьому протязі BC між верхом стінки й площею зрушення* (фіг. 55).

Припустімо, що зведену до землі тимчасову вантагу $h_r$ розміщено між $B$ і $C$ на довжині $mC$ (фіг. 55); вантажна лінія цієї вантаги є проста $RR'$. Положення площі зрушення при плоскій стінці та плоскій поверхні землі не залежить од тимчасової вантаги (див. § 8), через це будуємо площу зрушення $AC$ для ненавантаженої стінки $AB$ й маємо положення точки $C$; тоді в тискові на стінку $AB$ братиме участь тільки тимчасова вантага на довжині $mC$, себ-то вага земляної призми з основою в формі рівнобіжника $mRC'C$ і висотою, що дорівнює одиниці (в напрямові нормальному до площі рисунка); вага цієї земляної призми дорівнює



Фіг. 55.

$$G' = \gamma \,.\, \text{пов.}\, mRC'C \,.\, 1 = \gamma \,.\, h_r \,.\, \overline{mC} \,.\, \text{cs}\delta.$$

Щоб одержати тимчасову вантагу $h'_r$, розподілену на всьому протязі $BC$ (фіг. 55), що діяла була-б так само, як і дана вантага $G'$, треба вагу земляної призми $BDC''C$ прирівняти до ваги $G'$ земляної призми $mRC'C$; вага земляної призми $BDC''C$ дорівнює

$$G'' = \gamma.\text{пов.}\; BDC''C \,.\, 1 = \gamma \,.\, h'_r \,.\, \overline{BC} \,.\, \text{cs}\delta,$$

отже,

$$\gamma \,.\, h_r \,.\, \overline{mC} \,.\, \text{cs}\delta = \gamma \,.\, h'_r \,.\, \overline{BC} \,.\, \text{cs}\delta;$$

звідси

$$\frac{h'_r}{h_r} = \frac{\overline{mC}}{\overline{BC}},$$

себ-то вся справа в тому, щоб перетворити рівнобіжника $mRC'C$ на еквівалентний з ним рівнобіжник $BDC''C$. Для графічного перетворення рівнобіжника $mRC'C$ на еквівалентний рівнобіжник $BDC''C$ роблять, як відомо, так: точку $C'$ з'єднують із точкою $B$

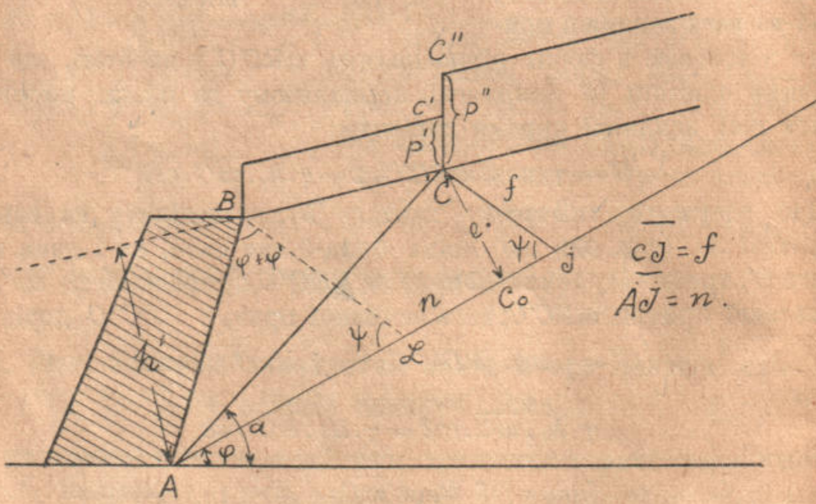
простою $BC'$, і через точку $m$ проводять просту $mC'' \parallel BC'$ до перетину її в точці $C''$ з вертикаллю в точці $C$; тоді відтинок $\overline{CC''}$ і буде „зведеною висотою $h_r'$“ рівномірно розподіленої по лінії $BN$ землі тимчасової вантаги; справді, з подібности трикутників $mCC''$ та $BCC'$ маємо написану раніше пропорцію:

$$\frac{\overline{CC''}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{mC}}{\overline{BC}} = \frac{h'_r}{h_r}.$$

Перевівши це перетворення тимчасової вантаги, будуємо зазначеним у § 14 (фіг. 50) способом трапеза тиску, користуючись з двох фіктивних стінок; і так визначаємо величину тиску землі й точку її зачепу.

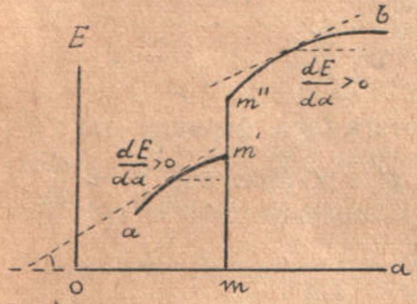
2. *Рівномірно-розподілена вантага переривна і змінює свою величину відразу (раптом) в якій-небудь точці поверхні землі* (фіг. 56).

У даному випадкові визначення max. $E$ не можна зробити з умови $\frac{dE}{d\alpha} = 0$, як це зроблено в § 7 при неперервній рівномірно-розподіленій вантазі; значить визначення положення

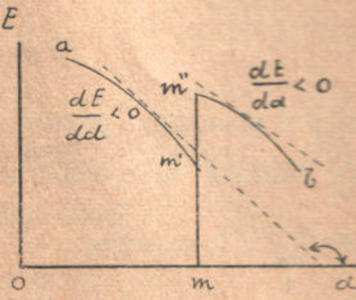



Фіг. 56.

площі зрушення не можна зробити так, як це показано в § 7. Тут через переривність вантаги, де вона в точці $C$ відразу змінється з величини $p_1$ на величину $p_2$, значіння похідної $\frac{dE}{d\alpha}$ може бути й додатне (більше від нуля) і від'ємне (менше від нуля) і з лівого й з правого боку від точки $C$ розподілу вантаги, а може бути додатне ліворуч од точки $C$ і від'ємне праворуч од точки $C$; при цьому величина тиску $E$ землі буде змінюватися раптом для місця, де вантага переривається. На фіг. 57 крива $E = f(\alpha)$, де $\alpha$ є кут нахилу площі $AC$ (фіг. 56) до позему, має такий вигляд переривної кривої, що для обох її частин $am'$ і $m''b$ з лівого

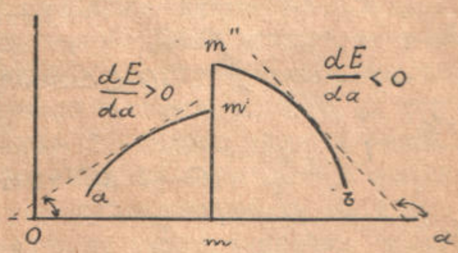



Фіг. 57.




Фіг. 57′.

і правого боку від місця перерви суцільности (точка $m$) тангенс кута нахилу дотичної до позему, себ-то $\frac{dE}{d\alpha}$, більший за нуль (цей кут гострий); у цьому випадкові, як видко з фіг. 57, max. $E$ буде праворуч од місця перерви суцільности кривої $E = f(\alpha)$, а саме в частині $m''b$ кривої; себ-то на фіг. 56 площа зрушення буде правіша за площину $AC$, що відповідає точці $C$ розподілу вантаги. Якщо крива $E = f(\alpha)$ іде, як зазначено на фіг. 57′,




Фіг. 57″.

де $\frac{dE}{d\alpha} < 0$ (від'ємне) для обох галузів кривої $am'$ і $m''b$, то max.$E$ буде ліворуч од місця перерви $m$ суцільности кривої, себ-то на галузі $am'$; через те на фіг. 56 площа зрушення буде лівіша від площі $AC$, що відповідає точці $C$ розподілу вантаги. Якщо-ж тиск $E$ землі змінюється переривно з зміною кута $\alpha$ так, що ліворуч од точки розподілу $C$ вантаги $\frac{dE}{d\alpha} > 0$ (фіг. 57″), а праворуч $\frac{dE}{d\alpha} < 0$, то max.$E$ буде в місці перерви суцільности, а саме $\max. E = \overline{mm''}$; через те на фіг. 56 площа зрушення буде площа $AC$, що відповідає точці $C$ розподілу вантаги.

При неперервній рівномірно-розподіленій вантазі в § 7 з умови $\frac{dE}{d\alpha} = 0$ знайшли, що вага земляної призми зрушення разом із зведеною до землі вантагою дорівнює

$$G = \triangle ACJ . \left(\gamma + \frac{2p}{h'}\right),$$

де $p$ є рівномірно-розподілена вантага (див. формулу (15) в § 7). На випадок переривної вантаги $p'$ і $p''$ (фіг. 56), коли $\frac{dE}{d\alpha} > 0$ або $\frac{dE}{d\alpha} < 0$, матимем

$$G \lesseqgtr \triangle ACJ \left(\gamma + \frac{2p}{h'}\right);$$

для точки $C$ (фіг. 56) розподілу вантаги неперервно розподілена вантага $p'$ раптом переходить у $p''$, отже для площі $AC$ маємо

$$G > \triangle ACJ \left(\gamma + \frac{2p'}{h'}\right)$$

і

$$G < \triangle ACJ \left(\gamma + \frac{2p''}{h'}\right),$$

або

$$\left.\begin{aligned} G - \triangle ACJ \left(\gamma + \frac{2p'}{h'}\right) > 0 \\ \text{і} \qquad \\ G - \triangle ACJ \left(\gamma + \frac{2p''}{h'}\right) < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

перша із залежностів (75) додатня, себ-то $\frac{dE}{d\alpha} > 0$, а друга від'ємна, себ-то $\frac{dE}{d\alpha} < 0$, отже площа зрушення буде площа $AC$ (фіг. 56) і точці $C$ розподілу відповідає $\max. E$ (порівн. фіг. 57''). Коли обидві залежності (75) додатні, себ-то $\frac{dE}{d\alpha} > 0$, то площа зрушення буде правіша від площі $AC$ (порівн. фіг. 57); коли-ж обидва вирази (75) будуть від'ємні, себ-то $\frac{dE}{d\alpha} < 0$, то площа зрушення буде лівіша за площу $AC$ (фіг. 56) (порівн. фіг. 57). Отже, щоб визначити положення площі зрушення при переривній рівномірно-розподіленій вантазі ми тримаємось знака виразів (75), себ-то знака двох величин:

$$\left.\begin{array}{l} G - \triangle ACJ\left(\gamma + \frac{2p'}{h'}\right) \\ \text{і} \\ G - \triangle ACJ\left(\gamma + \frac{2p''}{h'}\right) \end{array}\right\} \qquad (75')$$

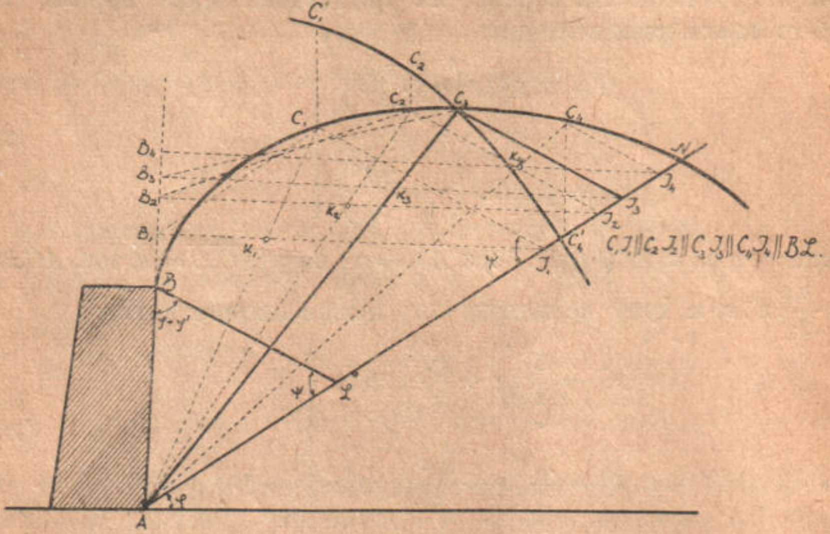
Якщо основа $\triangle ACJ$ (фіг. 56) є $\overline{AJ} = n$ і висота $\overline{C_0C} = e$, то $\triangle ACJ = \frac{1}{2} . n . e$; а тому величини (75′) можна написати так:

$$\left.\begin{array}{l} G - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p'}{h'}\right) . n . e \\ \text{і} \\ G - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p''}{h'}\right) . n . e \end{array}\right\} \qquad (75'')$$

3. Коли на поверхню землі діють зосереджені вантаги, ці вантаги замінюються вагою певного стовпа землі, себ-то замінюються зведеною до землі рівномірно-розподіленою вантагою; при цьому одержана непереривна рівномірно-розподілена вантага розподіляється на поверхні землі, починаючи з верху $B$ стінки (фіг. 56). Величина цієї непереривної вантаги залежить од того, як передається землі тиск зосередженими вантагами; так, наприклад, тиск коліс паротягу на землю передається через постіль злежня й баластний шар під кутом у 30° до вертикали, як це й було зазначено в § 4. При цьому беруть на увагу, звичайно, тільки зосереджені вантаги, розміщені над призмою зрушення на протязі $BC$ (фіг. 56).

## § 16. Визначення положення площі зрушення спробами при довільному обрисі поверхні землі (спосіб Вінклерів).

Припустімо, що поверхня землі є довільна крива поверхня $BB'$ (фіг. 58); щоб одшукати спробами положення площ зрушення в даному випадкові, ми вже в § 5 зазначали спосіб Pillet, який, одначе, не досить швидко доводить мети. Зазначений нижче спосіб, що на нього вказав проф. Вінклер (Winkler), є простіший і швидший. Припустімо, що справжня лінія зрушення є лінія $AC_3$ (фіг. 58). Перетворімо пов. $ABC_3$ в еквівалентний трикутник $AB_3C_3$; щоб перетворити, замінимо криву




Фіг. 58.

$BC_3$ на ламану лінію і зробимо перетворення в трикутник, як це зазначено на фіг. 59. На фіг. 59 лінію землі дано в вигляді


Фіг. 59.

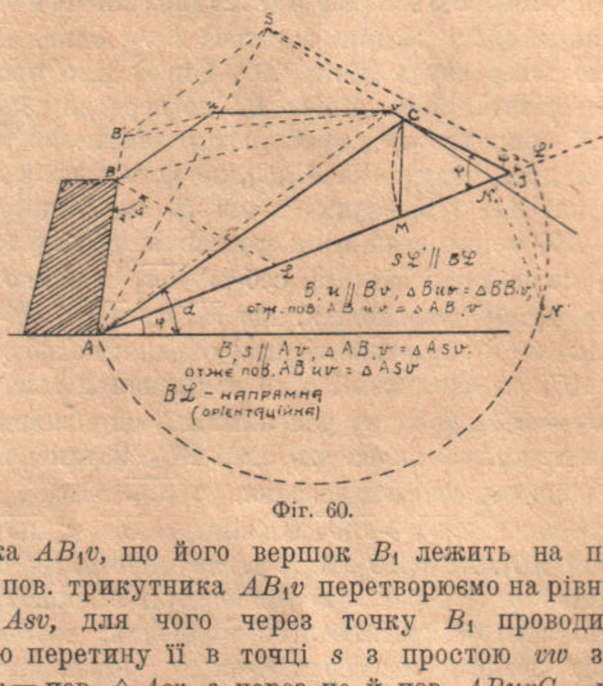
ламаної $Buvw$; пов. $ABuv$ перетворена в рівну їй пов. трикутника $AB_1v$, що його вершок $B_1$ лежить на продовженні заднього боку $AB$ стінки; щоб перетворити $ABuv$ в рівний (поверхнею) трикутник $AB_1v$, з'єднуємо $B$ і $v$ простою $Bv$, із точки $u$ проводимо просту $uB_1 \parallel Bv$ до перетину її в точці $B_1$ з продовженням простої $AB$; тоді одержимо два еквівалентні трикутники $Buv$ і $BB_1v$; прикладаючи до трикутника $ABv$ трикутник $Buv$, матимемо пов. $ABuv$; а прикладаючи до того-ж трикутника $ABv$ трикутник $BB_1v$, еквівалентний з трикутником $Buv$, одержимо трикутник $AB_1v$;

отже поверхня трикутника $AB_1v$ дорівнює пов. $ABuv$. Далі на фіг. 59 перетворюємо так само пов. $AB_1vw$ на еквівалентний трикутник $AB_2w$, проводячи просту $vB_2 \parallel wB_1$ і маючи два еквівалентні трикутники $B_1vw$ і $B_1B_2w$. Зробивши перетворення поверхні $ABC_3$ (фіг. 58) в рівновеликий їй трикутник $AB_1C_3$, ми прийшли до випадку простолінійної форми поверхні землі $B_3C$, як це є наприклад на фіг. 41; тільки тут, на фіг. 58, за вершок стінки ми вважаємо точку $B_3$. Взявши точку $B_3$ за верх стінки, будуємо за Понсле́-Ребганом положення точки $J_3$, яку з'єднуємо з точкою $B_3$ простою $B_3J_3$; якщо $AC_3$ є площа зрушення, то точка $k_3$ перетину $AC_3$ з простою $B_3J_3$ згідно з § 12 (див. кінець його) є точка, що ділить на дві рівні частині відтинок $B_3J_3$, отже, $\overline{B_3k_3} = \overline{k_3J_3}$.

Візьмімо тепер якусь лінію $AC_1$ і проведімо просту $C_1J_1$, рівнобіжну з орієнтаційною лінією $BL$ до перетину її в точці $J_1$ з лінією $AN$ природнього укосу; потім замінюємо пов. $ABC_1$ на рівну з нею пов. трикутника $AB_1C_1$, що його вершок $B_1$ лежить на продовженні $AB$, і з'єднуємо точки $B_1$ та $J_1$ простою $B_1J_1$. Якщо лінія $AC_1$ є справжня лінія зрушення, то за § 12 точка $k_1$ ділить $B_1J_1$ на дві рівні частині, себ-то $\overline{B_1k_1}$ повинно дорівнювати $\overline{k_1J_1}$; на фіг. 58 виявляється, що $\overline{k_1J_1} > \overline{B_1k_1}$, себ-то проведена лінія $AC_1$ не є справжня лінія зрушення; похибку у відхиленні лінії $AC_1$ од справжньої лінії зрушення можна виразити різницею $\overline{k_1J_1} - \overline{B_1k_1}$, причому для лінії $AC_1$ ця різниця додатня. Так само для другої взятої на око лінії $AC_2$ матимемо похибку $\overline{k_2J_2} - \overline{B_2k_2}$ (фіг. 58), що теж додатня, бо $\overline{k_2J_2} > \overline{B_2J_2}$. Для лінії $AC_4$ (фіг. 58) похибка $\overline{k_4J_4} - \overline{B_4J_4}$ від'ємна, бо $\overline{k_4J_4} < \overline{B_4J_4}$. Взявши декілька ліній $AC_1$, $AC_2$, $AC_4$, й т. и. на спробу, ми визначимо для них величини похибок, які відповідали-б нашому припущенню, що ці лінії є справжні лінії зрушення; далі відзначімо величини цих похибок по вертикалях у відповідних точках $C_1$, $C_2$, $C_4$, й т. и. так, що $\overline{k_{11}J} - \overline{B_1J_1} = \overline{C_1C_1'}$, $\overline{k_2J_2} - \overline{B_2J_2} = \overline{C_2C_2'}$, $\overline{k_4J_4} - \overline{B_4J_4} = \overline{C_4C_4'}$ й ин.; з'єднавши кінці $C_1'$, $C_2'$, $C'_4$, й и. лінією, ми матимемо криву $C_1'C_2'C_4'$... похибок, що в ній ординати $\overline{C_1C_1'}$, $\overline{C_2C_2'}$,..., відкладені вгору від лінії $BN$ землі, додатні, а ординати $\overline{C_4C_4'}$..., відкладені вниз од лінії $BN$ землі, від'ємні. Ця крива $C_1'C_2'C_4'$... похибок перетинає лінію землі $BN$ в якійсь точці $C_3$, що для неї ордината, себ-то похибка, є нуль; отже точка $C_3$ відповідає справжній площі зрушення $AC_3$, що для неї маємо рівність $\overline{k_3J_3} = \overline{B_3k_3}$.

## § 17. Визначення тиску землі при плоскій стінці та ламаній лінії землі.

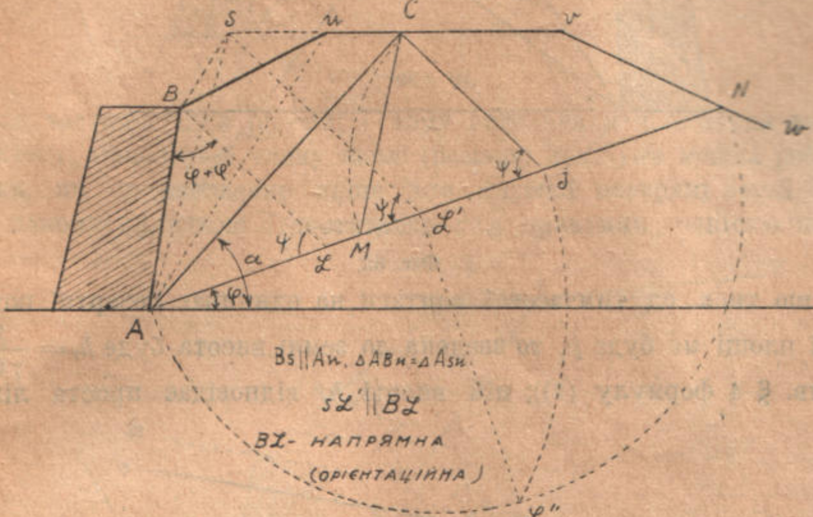
На фіг. 60 нарисовано плоску стінку $AB$ і лінію землі в формі ламаної $Buvw$. Припустімо, що за Вінклеровим способом спробами визначено, що справжня площа зрушення $AC$ іде так, що точка $C$ міститься на частині $vw$ лінії землі; на таке положення площі $AC$ нам указує те, що на лінії $vw$ землі будуть і додатні й від'ємні похибки. Як зазначено в § 16 (див. фіг. 59), перетворюємо поверхню $ABuv$ в рівну з нею поверхню




Фіг. 60.

трикутника $AB_1v$, що його вершок $B_1$ лежить на продовженні $AB$. Далі пов. трикутника $AB_1v$ перетворюємо на рівну пов. трикутника $Asv$, для чого через точку $B_1$ проводимо просту $B_1s \parallel Av$ до перетину її в точці $s$ з простою $vw$ землі; отже пов. $ABuv =$ пов. $\triangle Asv$, а через це й пов. $ABuvC =$ пов. $\triangle AsC$. За Понсле́-Ребганом пов. $ABuvC =$ пов. $\triangle ACJ$, через це й пов. $\triangle AsC =$ пов. $\triangle ACJ$; положення точки $J$ визначиться через Понсле́-Ребганове будування: через точку $s$ проводимо просту $sL'$ рівнобіжно з напрямною $BL$ до перетину її в точці $L'$ з лінією природнього укосу й будуємо відтинок $AJ$ як середню пропорціональну між $AN$ і $AL'$, і таким чином маємо трикутника тиску $CJM$, що й визначає тиск землі на стінку $AB$. На фіг. 60 напрямна лінія $BL$ іде вище за лінію $sw$ землі; а тому при збудуванні за Понсле́-Ребганом півколо накреслюємо на $AL'$ як на поперечникові, а нормалю $NN'$ до $AN$ проводимо з точки $N$ перетину $sw$ землі з лінією $AN$ природнього укосу.

На фіг. 61 вказано випадок, коли точка $C$ лінії зрушення $AC$ міститься на частині $uv$ землі. Тут перетворюємо трикутник $ABu$ в рівновеликий йому трикутник $Asu$, проводячи через вершок $B$ стінки просту $Bs \parallel Au$ до перетину її в точці $s$ з простою $uc$ землі; тоді $\triangle ABu = \triangle Asu$, і значить, пов. $ABuC =$ пов. $\triangle AsC =$ пов. $\triangle ACJ$; положення точки $J$ визначаємо за Понсле́-Ребгановим збудуванням, проводячи через $s$ просту $sL' \parallel BL$. На фіг. 62 наведено такий випадок, коли лінія землі обмежена двома простими

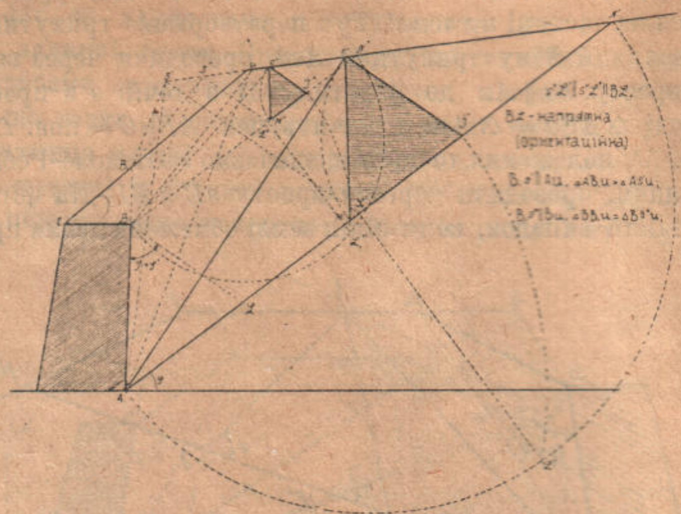



Фіг. 61.

$tu$ та $uv$, причому горішня площа стінки вкрита землею. В цьому випадкові, продовживши $AB$ до перетину з $tu$ в точці $B_1$, маємо дві фіктивні стінці $AB_1$ і $BB_1$. Визначаємо за Вінклером положення точок $C'$ і $C''$ площ зрушення для цих двох стінок; потім перетворюємо, як це зазначено на фіг. 61, пов. $AB_1uC'$ і $BB_1uC''$ в рівні з ними пов. трикутників $As'C'$ і $Bs''C''$ і будуємо за Понсле́-Ребганом трикутники тисків $C'J'M'$ і $C''J''M''$. Тиск землі на фіктивну стінку $AB_1$ дорівнюватиме $\triangle C'J'M' . \gamma$, де $\gamma$ є вага одиниці об'єму землі; а тиск землі на фіктивну стінку $BB_1$ буде $\triangle C''J''M'' . \gamma$; отже тиск землі на дану стінку $AB$, коли немає тимчасової вантаги, буде:

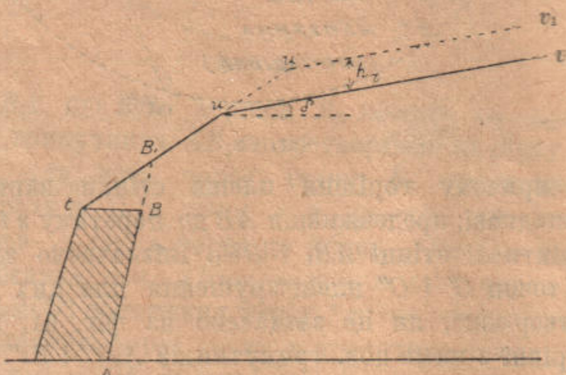
$$E = \gamma . \triangle C'J'M' - \gamma . \triangle C''J''M'' = \gamma . (\triangle C'J'M' - \triangle C''J''M'').$$

На фіг. 63 вказано випадок, коли горішню частину стінки вкрито землею і на лінії $uv$ землі міститься тимчасова вантага.




Фіг. 62.

Якщо тиск од тимчасової вантаги на одиницю поверхні похилої площі $uv$ буде $p$, то зведена до землі висота буде $h_r = \frac{p}{\gamma \cdot cs\delta}$ (див. § 4 формулу (2)); цій висоті $h_r$ відповідає проста лінія

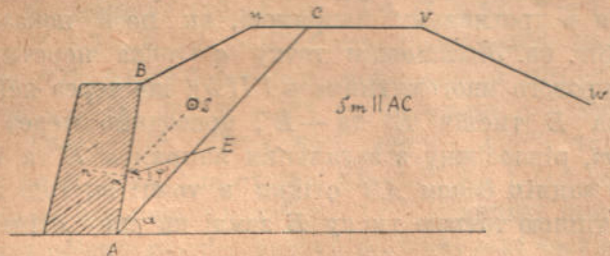



Фіг. 63.

вантаги $u'v'$, рівнобіжна до $uv$. Якщо лінія $uv$ позема, то зведена висота $h_r = \frac{p}{\gamma}$, бо $cs\delta = 1$.

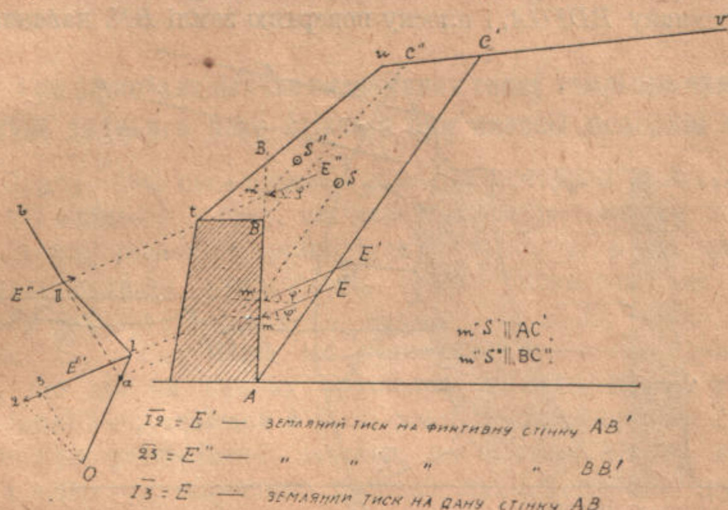
Збудувавши вантажну лінію $u'v'$, беремо нову лінію землі по ламаній $tu'v'$ і переводимо дальші будування за фіг. 62.

Розглядаючи фіг. 62, бачимо, що для частини плоскої стінки $BB_1$ і всієї стінки $AB_1$ площі зрушення $BC'''$ і $AC'$ не рівнобіжні, як тоді, коли лінія землі проста, приміром на фіг. 41; отже закон розподілу тиску землі на задній бік стінки буде




Фіг. 64.

для частин стінки різний; а тому визначення положення точки зачепу рівнодійної тиску землі (розпору землі) не можна робити так, як це зазначено вище для плоскої поверхні землі. Але в даному випадкові з достатньою для практики точністю поло-



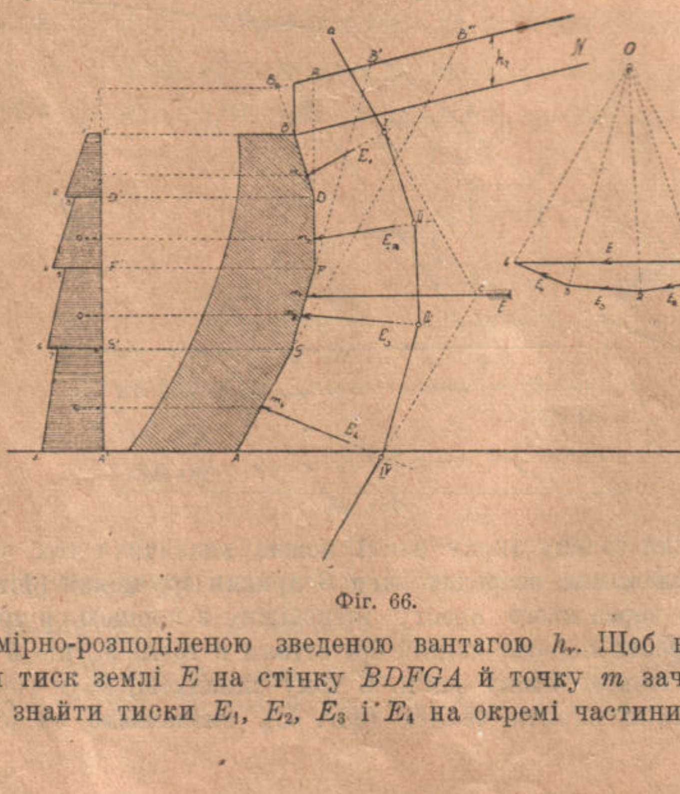

Фіг. 65.

ження точки зачепу тиску землі можна визначити так: визначивши положення осередку ваги $S$ призми зрушення (фіг. 64), проводимо через нього просту рівнобіжну з площею зрушення; тоді ця проста перетне задній бік стінки в точці $m$, що й буде зачіпною точкою тиску землі. В тому випадкові, коли горішня площа стінки вкрита землею (фіг. 65), визначаємо за фіг. 64

положення точки $m'$ зачепу земляного тиску $E'$ на фіктивну стінку $AB_1$ (фіг. 65) і точки $m''$ зачепу тиску землі $E''$ на фіктивну стінку $BB_1$; тиск $E$ землі на дану стінку $AB$ визначається різницею тисків $E'$ та $E''$, і щоб знайти положення цієї рівнодійної $E$ за допомогою шнурового многокутника, силу $E''$ треба прикласти в противному напрямові, як це й показано в лівій частині фіг. 65. Знайшовши точку $a$ (точка перетину крайніх боків шнурового многокутника $a\,I\,II\,b$), що через неї проходить рівнодійна $E$ тисків $E'$ та $-E''$, проводимо через цю точку просту $am$, рівнобіжну з загальним напрямом $E'$ та $E''$ до перетину її з заднім боком $AB$ стінки в точці $m$; тоді ця точка $m$ і буде зачіпною точкою тиску $E$ землі на дану стінку $AB$.

## § 18. Графічне визначення тиску землі при плоскій поверхні землі й при стінці, що її задній бік являє ламану або криву лінію (фіг. 66).

На фіг. 66 нарисовано стінку, що обрис її заднього боку являє ламану $BDFGA$, і плоску поверхню землі $BN$, навантажену



Фіг. 66.

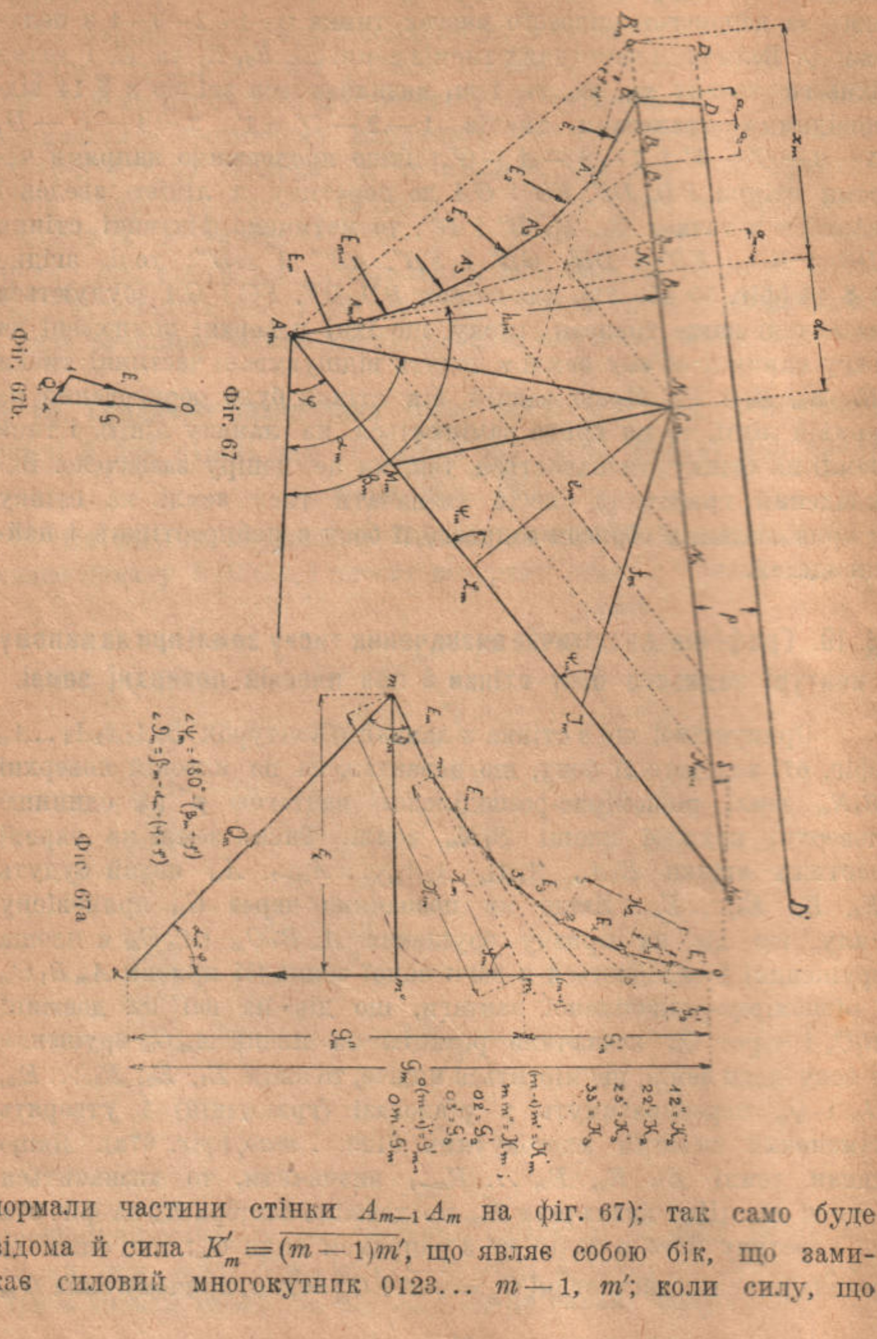
рівномірно-розподіленою зведеною вантагою $h_r$. Щоб визначити цілий тиск землі $E$ на стінку $BDFGA$ й точку $m$ зачепу його, треба знайти тиски $E_1$, $E_2$, $E_3$ і $E_4$ на окремі частини $BD$, $DF$,

$FG$ і $GA$ стінки, і ці частинні тиски додати в рівнодійну $E$ за допомогою шнурового многокутника $a\ I\ II\ III\ IV\ b$, побудованого за допомогою силового многокутника 0—1—2—3—4 з полюсом $O$. Величини частинних тисків землі $E_1$, $E_2$, $E_3$ та $E_4$ і точки їхнього зачепу $m_1$, $m_2$, $m_3$ і $m_4$ визначаються згідно з § 14 відповідними трапезами тисків $1-2-D'-1'$, $3-4-F'-D'$, $5-6-G'-F'$ і $7-8-A-G'$. Якщо продовжимо напрями частин стінки $BD$, $DF$, $FG$ і $GA$ до перетину з лінією зведеної вантаги в точках $B_0$, $B'$, $B''$ і $B'''$, то матимемо фіктивні стінки $DB_0$ і $BB_0$, $FB'$ і $DB'$, $GB''$ і $FB''$, $AB'''$ і $GB'''$; тоді, згідно з § 14 (фіг. 50 або 51), для стінок $BD$, $DF$, $FG$ і $GA$ збудуються зазначені вище трапези тиску, що їхні поверхні помножені на вагу одиниці об'єму землі $\gamma$, дадуть відшукувані частинні тиски $E_1$, $E_2$, $E_3$ і $E_4$. Якщо задній бік стінки буде обрисований по кривій лінії, то ця крива замінюється на ламану лінію, і тиск землі на стінку визначається так, як це допіру зазначено. Викладений графічний спосіб визначати тиск землі на стінку з криволінійним обрисом заднього її боку є найпростіший і найшвидший.

## § 19. Графічно-аналітичне визначення тиску землі при ламаному контурі заднього боку стінки й при плоскій поверхні землі.

Припустімо, що є стінка з ламаним контуром $B_1A_1A_2A_3 \ldots A_m$ (фіг. 67) заднього її боку, що навантажена по плоскій поверхні $B_1N_m$ землі рівномірно-розподіленою вантагою $p$ на одиницю поверхні похилої площі $B_1N_m$ землі. Тиски землі на окремі частини стінки $B_1A_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3, \ldots A_{m-1}, A_m$ нехай будуть $E_1$, $E_2$, $E_3, \ldots E_m$. Якщо ми позначимо через $G_m$ прямовісну силу, що діє на призму зрушення $A_mB_1C_m$ ($A_mC_m$ є площа зрушення) і складається з ваги самої земляної призми $A_mB_1C_m$ і рівномірно-розподіленої вантаги, що діє на неї на довжині $B_1C$, і через $Q_m$ позначимо реакцію на площі $A_mC_m$ зрушення з боку маси землі, що міститься нижче, то сили $E_1$, $E_2$, $E_3, \ldots E_m$, $G_m$ і $Q_m$ перебуватимуть у рівновазі (граничній) і утворять замкнений силовий многокутник $0123\ldots mao$ (фіг. 67а). Якщо тиски землі $E_1$, $E_2$, $E_3$, $\ldots E_{m-1}$ визначити, то визначиться і тиск $E_m$. Щоб визначити $E_m$, продовжімо вектора $E_m$ на фіг. 67а до перетину його в точці $m'$ з напрямом сили $G_m$; тоді сила $G_m$ розкладеться на дві частині $G'_m = \overline{om'}$ і $G''_m = \overline{m'a}$, причому сила $G'_m$

цілком визначиться, бо сили $E_1$, $E_2$, $E_3$,... $E_{m-1}$ дано величиною й напрямом, а силу $E_m$ дано напрямом (під кутом $\varphi'$ до



Фіг. 67

Фіг. 67b.

Фіг. 67а

нормали частини стінки $A_{m-1} A_m$ на фіг. 67); так само буде відома й сила $K'_m = \overline{(m-1)m'}$, що являє собою бік, що замикає силовий многокутник 0123... $m-1$, $m'$; коли силу, що її представляє вектор $\overline{mm'}$ на фіг. 67а, позначити через $K_m$, то відшукуваний тиск

$$E_m = \overline{mm'} - \overline{(m-1)m'} = K_m - K'_m; \qquad (76)$$

отже визначення величини тиску землі $E_m$ на будь-який $m$-й бік $A_{m-1} A_m$ ламаного контуру заднього боку стінки полягає в визначенні сил $K'_m$ і $K_m$. Сили $K_m$, $G''_m$ і $Q_m$ перебувають у рівновазі й утворюють замкнений силовий трикутник $mm'a$ (фіг. 67а), де сила $G''_m = G_m - G'_m$. Із силового трикутника $mm'a$ маємо, що $K_m = G''_m . \frac{\operatorname{sn}(\alpha_m - \varphi)}{\operatorname{sn}\vartheta} = G''_m . \frac{\operatorname{sn}(\alpha_m - \varphi)}{\operatorname{sn}[\beta_m - \alpha_m + (\varphi + \varphi')]}$; вважаючи, що $K_m$ змінюється неперервно з зміною кута $\alpha_m$ нахилу площі зрушення до позему, матимемо max. $K_m$ із умови $\frac{dK_m}{d\alpha_m} = 0$. Величина $K_m$ складається так само, як у § 5, з величини тиску землі $E$ (див. формулу (7) § 5), а тому із умови $\frac{dK_m}{d\alpha_m} = 0$ ми матимемо такий самий вираз для сили $G''_m$, як ми мали в § 7 для сили $G$ із умови $\frac{dE}{d\alpha} = 0$, а саме вираз однаковий із виразом (15′) § 7, себ-то

$$G''_m = \gamma' . \triangle A_m C_m J_m , \qquad (77)$$

де $\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h_m}$, причому $h_m$ в даному разі є довжина нормали з точки $A_m$ (фіг. 67) на напрям лінії $B_1 N_m$ землі.

Візьмімо тепер на лінії $B_1 N_m$ землі якусь точку $B'_m$ так, щоб пов. $\triangle A_m B'_m C_m$ дорівнювала пов. $\triangle A_m C_m J_m$; тоді ми матимемо уявну (фіктивну) плоску стінку $A_m B'_m$ з плоскою поверхнею землі $B'_m N_m$, що навантажена рівномірно-розподіленою вантагою $p$ з лінією вантаги $D_1 D'$ (як додано крапковою лінією на фіг. 67). Для такої стінки $A_m B'_m$ і побудовано за Понсле́-Ребганом трикутника $A_m C_m J_m$, причому проста $B'_m L$ є напрямна лінія (орієнтаційна); база $C_m J_m = f_m$ трикутника $A_m C_m J_m$ рівнобіжна з напрямною $B'_m L$ і висота його $e_m$ є висота трикутника тиску $C_m J_m M_m$. З будування $\triangle A_m B_m' C_m = \triangle A_m C_m J_m$, отже $\gamma' . \triangle A_m B'_m C_m = \gamma' . \triangle A_m C_m J_m$; але за (77) сила $G'' = \gamma' . A_m C_m J_m$, а тому

$$\gamma' \triangle A_m B'_m C_m = G''_m = G_m - G'_m . \qquad (78)$$

Продовжимо напрями стінок $B_1 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots A_{m-1}$, $A_m$ (фіг. 67) до перетину їх з лінією $B_1 N_m$ землі відповідно в точках

$B_1$, $B_2$, $B_3, \ldots B_{m-1}$, $B_m$; визначивши положення на лінії $B_1N_m$ землі точок $B'_1, B'_2, B'_3 \ldots B'_{m-1}, B'_m$ із умов рівности поверхонь $\triangle A_1B'_1C_1 = \triangle A_1C_1J_1$, $\triangle A_2B'_2C_2 = \triangle A_2C_2J_2$, $\triangle A_3B'_3C_3 = \triangle A_3C_3J_3, \ldots \triangle A_{m-1}B'_{m-1}C_{m-1} = \triangle A_{m-1}C_{m-1}J_{m-1}, \triangle A_mB'_mC_m = \triangle A_mC_mJ_m$, позначімо віддалі точок $B'_1, B'_2, B'_3, \ldots B'_{m-1}, B'_m$ від точок $B_1$, $B_2$, $B_3, \ldots B_{m-1}$, $B_m$ відповідно через $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{m-1}, x_m$; при цьому, очевидячки, для першої стінки $B_1A_1$ точка $B'_1$ впаде на точку $B_1$ і віддаль $x_1 = 0$, себ-то ми в цьому випадкові маємо дійсну плоску стінку $B_1A_1$. Довжини нормалів на напрям лінії $B_1N_m$ землі з точок $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{m-1}, A_m$, або, що те саме, висоти трикутників $A_1B_1C_1$, $A_2B'_2C_2$, $A_3B'_3C_3, \ldots A_{m-1}B'_{m-1}C_{m-1}$, $A_mB'_mC_m$ позначімо відповідно через $h_1, h_2, h_3, \ldots h_i \ldots h_{m-1}, h_m$; віддалі точок $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{m-1}$, $B_m$ від відповідних їм точок $C_1$, $C_2$, $C_3, \ldots C_{m-1}$, $C_m$ площів зрушення позначімо через $d_1$, $d_2$, $d_3, \ldots d_i \ldots d_{m-1}, d_m$; взаємні віддалі точок $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{m-1}, B_m$ через $a_1, a_2, a_3, \ldots a_i \ldots a_{m-1}, a_m$. На фіг. 67 для більшої ясности рисунка точки $B'_2, B'_3, \ldots B'_{m-1}$ і точки $C_1, C_2, C_3, \ldots C_{m-1}$, площів зрушення, що відповідають дійсній плоскій стінці $B_1A_1$ і фіктивним плоским стінкам $B'_2A_2, B'_3A_3, \ldots B'_{m-1}A_{m-1}$, не нанесені; ці точки $B'_m$ і $C_m$ зазначені тільки для $m$-ої фіктивної стінки $B'_mA_m$. Залежність (78) буде справджуватися для всіх фіктивних стінок $B'_2A_2$, $B'_3A_3, \ldots B'_{m-1}A_{m-1}, B'_mA_m$, причому індексові $m$ у цій залежності треба надати значіння від 2 до $m$; а для дійсної стінки $B_1A_1$, що для неї точка $B'_1$ припадає на точку $B_1$, сила $G'_1 = 0$, як видно з фіг. 67а, де сила $E_1$ перетинає силу $G_m$ в точці $O$; у цьому випадкові сила $G_m$ буде прямовісною силою, що діє на призму зрушення $A_1B_1C_1$ і рівна з $G_1$, як це показано на фіг. 67b в силовому трикутникові $1Oa$, де сили $E_1, G_1$ і реакція $Q_1$ уміщеної нижче від площі зрушення $A_1C_1$ маси землі перебувають у рівновазі.

Визначимо тепер для $m$-ої фіктивної стінки $B'_mA_m$ віддаль $B'_mB_m = x_m$. Із фіг. 67 маємо $\triangle A_mB'_mC_m = \frac{1}{2}\left(x_m + d_m\right).h_m$; себ-то згідно з (78) матимемо

$$\gamma' \cdot \frac{1}{2}\left(x_m + d_m\right).h_m = G_m - G'_m,$$

або

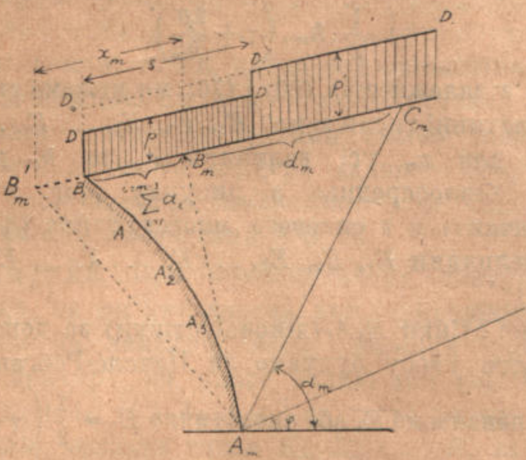
$$\frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h_m}\right).\left(x_m + d_m\right).h_m = G_m - G'_m. \qquad (79)$$

Але прямовісна сила $G_m$, як це видко із позначень фіг. 67, дорівнює

$$G_m = \sum_{i=1}^{i=m-1} p.a_i.1 + p.d_m.1 + \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{1}{2}.a_i h_i.1.\gamma + \frac{1}{2}.d_m.h_m.1.\gamma =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m-1} p.a_i + p.d_m + \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{1}{2}.a_i.h_i.\gamma + \frac{1}{2}.d_m.h_m.\gamma,$$

тут індекс $i$ для всіх віддалів $a$, $d$ і висот $h$ змінюється від 1 до $m-1$. Ставлячи цей вираз $G_m$ в рівність (79), знаходимо, що




Фіг. 68.

$$x_m = \frac{\frac{1}{2}\gamma \sum_{i=1}^{i=m-1} a_i.h_i + p\sum_{i=1}^{i=m-1} a_i - G'_m}{\frac{1}{2}.\gamma.h_m + p} = \frac{\sum_{i=1}^{i=m-1}\left(\frac{1}{2}\gamma.a_i.h_i + p.a_i\right) - G'_m}{\frac{1}{2}.h_m.\left(\gamma + \frac{2p}{h_m}\right)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=m-1} a_i.\frac{1}{2}.h_i\left(\gamma + \frac{2p}{h_i}\right) - G'_m}{\frac{1}{2}h_m.\left(\gamma + \frac{2p}{h_m}\right)}. \qquad (80)$$

Якщо рівномірно-розподілена вантага дана так, як це зазначено на фіг. 68, де на довжині $DD'$ іде вантага $p$, а на довжині $D_1D_1'$ вантага $p'$ (переривна вантага), то можна уявити собі, що вантага $p'$ іде на всій довжині $D_0D_1'$, с.-то від вершка $B_1$ стінки; тоді прямовісна сила $G_m$, що діє на призму $A_mA_{m-1}\ldots A_3A_2A_1B_1C_m$ зрушення дорівнюватиме вантазі на довжині $B_1C_m$ від рівномірно-розподіленої вантаги $p'$ і ваги самої земляної призми $A_m A_{m-1} \ldots\ldots A_3 A_2 A_1 C_m$, віднявши вантагу на довжині $s$ од рівномірно-розподіленої вантаги $p'-p$; отже

$$G_m = \sum_{i=1}^{i=m-1} p' . a_i . + p' . d_m + \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{1}{2} . a_i . h_i . \gamma + \frac{1}{2} . d_m . h_m . \gamma - (p'-p) . s ;$$

ставлячи це значіння $G_m$ в залежність (79), знайдемо, що

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^{i=m-1} a_i . \frac{1}{2} . h_i . \left(\gamma + \frac{2p'}{h_i}\right) - G'_m - (p'-p) . s}{\frac{1}{2} . h_m . \left(\gamma + \frac{2p'}{h_m}\right)} . \tag{80'}$$

Користуючись з залежностів (80) і (76), ми можемо визначити послідовно всі частинні тиски землі $E_1, E_2, E_3, \ldots E_i, \ldots E_{m-1}, E_m$. У виразі (80) для $x_m$ усі величини $a_i$ та $h_i$ дано, бо ми одержуємо їх безпосередньо з рисунку (фіг. 67); а величини $G'_m$ визначаються з силового многокутника (фіг. 67a). Визначатимемо величини $E_1, E_2, E_3, \ldots E_i, \ldots E_{m-1}, E_m$ за таким способом.

Для першої стінки $B_1 A_1$ (дійсної стінки) за допомогою лінії $A_1 N_1$ природнього укосу будуємо за Понсле́-Ребганом трикутника тиску й визначаємо $E_1$ або аналітично $E_1 = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h_1}\right) . e_1 . f_1$, де $e_1$ і $f_1$ це висота й основа трикутника тиску, або графічно, перетворюючи трикутника тиску на прямокутний трикутник тиску, як це зазначено в § 14 на фіг. 50; далі з силового многокутника на фіг. 67a беремо величини $G'_2$ і $K_2'$ (виміром за рисунком); потім за (80) визначаємо віддаль $x_2$ точки $B'_2$ від точки $B_2$, підставляючи в (80) одержану величину $G'_2$; визначивши точку $B'_2$, будуємо за Понсле́-Ребганом на лінії $A_2 N_2$ природнього укосу трикутника тиску з висотою $e_2$ і основою $f_2$ для фіктивної плоскої стінки $A_2 B'_2$, проводячи напрямну $B'_2 L_2$ під кутом $\varphi + \varphi'$ до напряму $B'_2 A_2$, і цим визначаємо величину $K_2 = \frac{1}{2} . \left(\gamma + \frac{2p}{h_3}\right) . e_2 . f_2$; далі за (76) визначаємо $E_2 = K_2 - K'_2$. Позначаючи на фіг. 67a тиск $E_2$ розміром і напрямом і проводячи напрям тиску $E_3$, маємо величини $G'_3$ і $K'_3$; потім за (80) визначаємо віддаль $x_3$ точки $B'_3$ од точки $B_3$ і для фіктивної плоскої стінки $B'_3 A_3$ будуємо за Понсле́-Ребганом трикутника тиску на лінії $A_3 N_3$ природнього укосу з висотою $e_3$ і основою $f_3$, проводячи напрямну $B'_3L_3$ під кутом $\varphi + \varphi'$ до напряму $B'_3A_3$; тоді визначиться величина $K_3 = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h_3}\right) e._3 . f_3$ (на фіг. 67а величина $K_2 = \overline{33'}$), а за (76) і величина $E_3 = K_3 - K'_3$. Так само визначиться і решта тисків $E_4, E_5, \ldots E_{m-1}, E_m$. На фіг. 67 для ясности рисунку не показано збудування Понсле́-Ребгана, отже не показано й фіктивні стінки $B_2'A_2$, $B_3'A_3, \ldots B'_{m-1}A_{m-1}$ і напрямні лінії $B'_2L_2$, $B'_3L_3, \ldots B'_{m-1}L_{m-1}$; так само на фіг. 67 не показано напрямну лінію $B_1L_1$ для дійсної плоскої стінки $B_1A_1$. Визначивши окремі тиски $E_1, E_2, E_3, \ldots E_{m-1}, E_m$ на стінки $B_1A_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3, \ldots A_{m-2}$, $A_{m-1}$, $A_{m-1}$, $A_m$ (фіг. 67) і знаючи з попереднього їхні зачіпні точки, визначаємо рівнодійну $E_{1-m}$ усіх цих тисків за допомогою шнурового многокутника.

Розглянувши допіру викладений спосіб визначати тиск землі в випадкові ламаного контура заднього боку стінки, бачимо, що цей спосіб вимагає чимало часу і не такий швидкий, як графічний спосіб, викладений в § 18.

Примітка. При криволінійному контурі заднього боку стінки, як ми вже знаємо, цей криволінійний контур замінюється на ламаний; якщо довжини окремих боків ламаного контуру не надто великі (на фіг. 67 довжини стінок $B_2A_2, A_2A_3, \ldots A_{m-1}, A_m$), то часто радять (проф. Мюллер-Бреслав) вважати тиски $E_2, E_3, \ldots E_m$ за прикладені в серединах цих боків; що-ж до першого боку $B_1A_1$ (фіг. 67), то тиск $E_1$ на цей бік можна розікласти на дві частині — на тиск $E_1^{\gamma}$ од самої землі і на тиск $E_1^{p}$ від самої тимчасової вантаги $p$; цей розклад робиться в відношенні $\gamma : \left(\gamma + \frac{2p}{h_1}\right)$, с.-то

$$E_1^{\gamma} = E_1 . \frac{\gamma}{\gamma + \frac{2p}{h_1}}$$

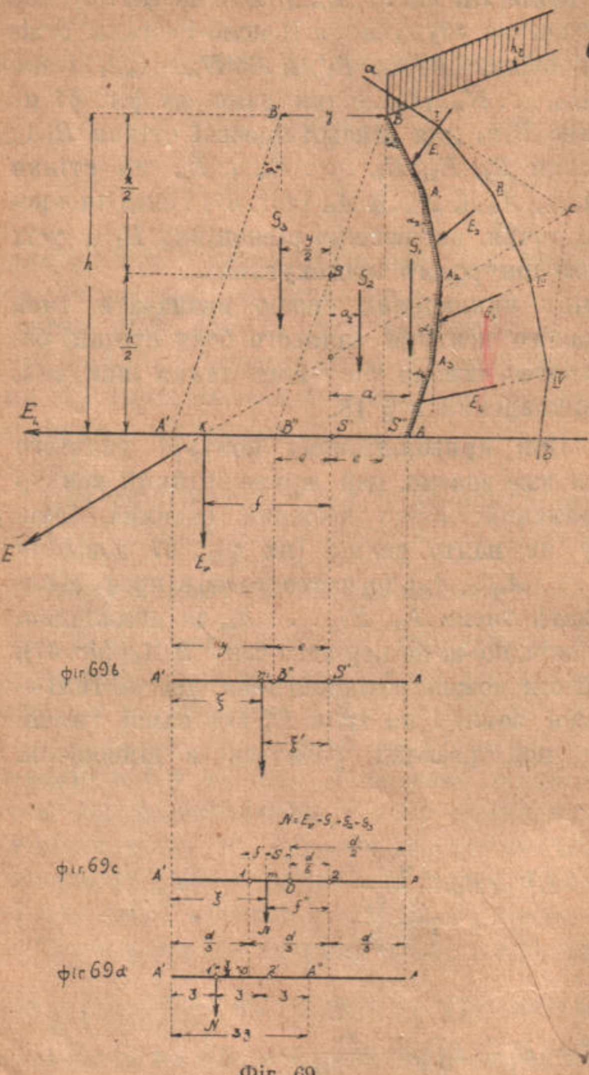
і

$$E_1^{p} = E_1 - E_1^{\gamma} = \frac{\frac{2p}{h_1}}{\gamma + \frac{2p}{h_1}};$$

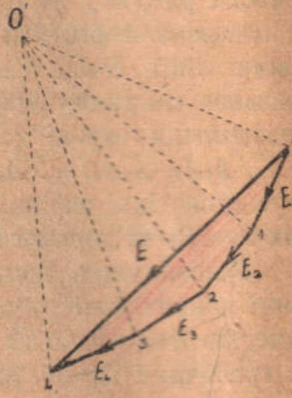
при цьому точку зачепу $E_1^{p}$ вважають в середині стінки $B_1A_1$, а точку зачепу $E_1^{\gamma}$ — на висоті спідньої третини стінки $B_1A_1$.

## § 20. Розрахунок підпірної стінки.

Припустімо, що є підпірна стінка з ламаним контуром $BA_1\,A_2\,A_3\,A$ (фіг. 69) заднього її боку; відхили окремих частин




Фіг. 69.



Фіг. 69а.

$BA_1, A_1A_2, A_2A_3$ і $A_3A$, с.-то тангенси кутів нахилу їх до вертикали дано; отже дано: $i_1 = \mathrm{tg}\alpha$, $i_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$, $i_3 = \mathrm{tg}\alpha_3$ і $i_4 = \mathrm{tg}\alpha_4$. Нахил зовнішнього боку $A'B'$ також дано, себ-то дано $i = \mathrm{tg}\alpha$.

Завдання розрахунку підпірної стінки передусім полягає в тому, щоб визначити товщину $\overline{BB'} = y$ в версі стінки; визначивши цей розмір $\overline{BB'}$, ми при даному відхилі $i$ переднього боку $A'B'$ стінки і при даному положенні точки $A$ основи стінки визначимо (через збудування) товщину $\overline{A'A}$ основи стінки; отже розміри стінки будуть визначені, себ-то стінка спроєктована.

Самий хід розрахунку, щоб визначити розміри стінки, полягає ось у чому.

Спочатку, користуючись із указівок § 18 і 14, будуємо трапези тисків для окремих частин $BA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A$ стінки й визначаємо величини тисків на ці частини $E_1$, $E_2$ $E_3$ і $E_4$; та їхні точки зачепу; після того за допомогою шнурового многокутника $a - I - II - III - IV - b$ (фіг. 67), збудованого з довільно взятим полюсом $O'$ (фіг. 67а), визначаємо положення рівнодійної $E$ всіх тисків $E_1$, $E_2$, $E_3$ і $E_4$; ця рівнодійна $E$ перетне основу $A'A$ стінки в точці $k$ (фіг. 67) і розкладеться на прямовісну складову $E_v$ та позему $E_h$. На основу $A'A$ стінки чинить тиск прямовісна складова $E_v$ повного тиску землі і вага всієї стінки, що визначається в залежності від розміру $\overline{BB'} = y$. Проводячи через вершок $B$ стінки просту $BB''$, рівнобіжну з даним напрямом $A'B'$ і прямовісною $BS''$, розбиваємо всю стінку на три частині; вага однієї частини буде $G_1 =$ пов. $BAS''.1.\gamma_1$, вага другої частини $G_2 =$ пов. $BS''B''.1.\gamma_1$ і вага третьої частини $G_3 = y.h.1.\gamma_1 = y.h.\gamma_1$ де $\gamma_1$ є вага одиниці об'єму кладки стінки; отже повний прямовісний тиск на основу $A'A$ стінки буде:

$$N = E_v + G_1 + G_2 + y.h.\gamma_1 = A + B.y. \tag{81}$$

Прямовісні сили $E_v$, $G_1$, $G_2$ і $G_3$ дають відносно будь-якої точки основи момент; момент усіх цих сил дорівнюватиме моментові їхньої рівнодійної $N$. Узявши середину $S$ простої $BB''$ і провівши через цю точку $S$ прямовісну $SS'$, ми візьмемо момент сил $Ev$, $G_1$, $G_2$ і $G_3$, або, що те саме, сили $N$, відносно точки $S'$; цей момент, як видко з позначень фіг. 69 і 69b, дорівнюватиме

$$M = -Ev.f + G_1.a_1 + G_2.a_2 - G_3.a_3 = -Ev.f +$$

$$+ G_1.a_1 + G_2.a_2 - y.h.\gamma_1.\frac{y}{2} = D + C.y^2 = -N.\xi'; \tag{82}$$

звідси маємо числову величину віддали точки $m$ зачепу рівнодійного прямовісного тиску $N$ од точки $S'$ у вигляді

$$\xi' = \frac{M}{N}. \tag{83}$$

Отже діяння тиску землі й ваги стінки на її основу $A'A$ зводиться до моменту, числова величина якого є $M = N.\xi'$, і до нормальної сили стиску $N$, що прикладена в точці $m$ (фіг. 69b); тому передусім треба визначити найбільші нормальні напруги в основі $A'A$ стінки (в точках $A'$ і $A$) так, щоб вони не переважали дозволеної напруги на ґрунт. Положення точки $m$ зачепу нормального тиску $N$ (фіг. 69b) зручніш визначити її віддаллю $\xi$ од лівої грани $A'$ основи; з фіг. 69b видко, що

$$\xi = (y + e) - \xi'. \tag{83a}$$

Отже ми матимемо в залежності від товщини $\overline{BB'} = y$ стінки у версі величини момента $M$, нормальної сили $N$ і віддали її $\xi$ від лівої грани $A'$ основи; підставляючи поступінно величини $y$ товщини стінки в версі (напр. $1,2^m$; $1,5^m$; $1,8^m$; $2^m$, і т. д.), ми матимемо відповідні величини $M$, $N$ і $\xi$, що по них ми й вилічимо найбільші нормальні напруги в основі $A'A$ стінки (в точках $A'$ і $A$); взявши з обчислених найбільших нормальних напруг найбільш підхожі до дозволеної (що не переважають її) ми й зупинимося на відповідній величині товщини $y$. В залежності від вибраної величини товщини $y$ стінки в версі її положення точки $m$ (фіг. 69b) зачепу рівнодійної нормальної сили $N$ в основі стінки $A'A$ може бути різне, а саме точка $m$ може бути в середній третині основи (в ядрі) (фіг. 69c) і може бути по-за цією третиною (по-за ядром) (фіг. 69d). Якщо точка $O$ (фіг. 69c) є осередок ваги площі основи (середина його), що її довжина є $d$, то згідно з позначенням на фіг. 69c **найбільша напруга стиску** в точці $A'$ буде

$$p' = \left(\frac{M}{W} + \frac{N}{F}\right) = \left(\frac{N.s}{\frac{1.d^2}{6}} + \frac{N}{1.d}\right) = \left(\frac{6.N.s}{d^2} + \frac{N}{d}\right) =$$

$$= \frac{N}{d}\left(\frac{6.s}{d} + 1\right) = \frac{N}{d}\left(\frac{6.s + d}{d}\right);$$

якщо віддаль сили $N$ од правої точки ядра 2 (фіг. 69с) є $f''$, то $s = f'' - \frac{d}{6}$, і значить

$$p' = \frac{N}{d}\left[\frac{6\left(f'' - \frac{d}{6}\right) + d}{d}\right] = \frac{6 \,.\, f'' . N}{d^2}, \tag{84}$$

де величина $N . f''$ є ядровий момент $M_2$ сили $N$ що-до точки 2 ядра (фіг. 69с). Якщо віддаль сили $N$ од точки 1 ядра (фіг. 69с) є $f'$, то найбільша напруга розтягу в правій точці $A$ основи $A'A$ аналогічно (84) буде

$$p = \frac{6 \,.\, N . f'}{d^2}. \tag{85}$$

З положенням точки $m$ зачепу нормальної сили $N$ по-за середньою третиною основи (по-за ядром) (фіг. 69d) на віддалі $\xi$ від лівої точки $A'$, цю точку $m$ беруть за першу точку $1'$ середньої третини основи завдовжки $3\xi = \overline{A'A''}$; значить тут силу $N$ прикладено в першій точці $1'$ ядра, і через те в точці $A''$ основи $A'A''$ напруга дорівнюватиме нулеві, а в точці $A'$ напруга буде напругою стиску; що-ж до частини $A''A$ всієї основи стінки, то вважають, що вона не працює. Якщо точка $O$ (фіг. 69d) є середина $A'A''$, то найбільша напруга стиску в точці $A'$ буде

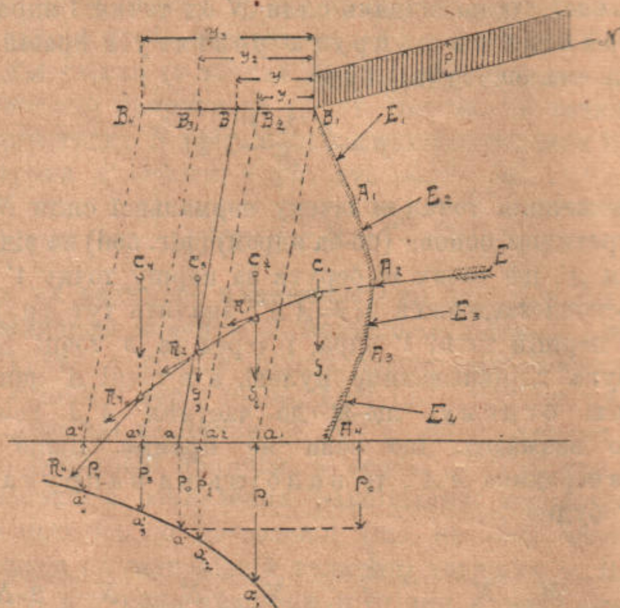
$$p' = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} = \frac{N . \frac{\xi}{2}}{\frac{1\,(3\xi)^2}{6}} + \frac{N}{1 \,.\, 3\xi} = \frac{N}{3 \,.\, \xi} + \frac{N}{3 \,.\, \xi} = \frac{2 \,.\, N}{3 \,.\, \xi} \tag{86}$$

Звичайно, вираз (86) найбільшої напруги стиску в точці $A'$ можна мати й просто за (84) через ядровий момент сили $N$ відносно ядрової точки $2'$ (фіг. 69d); що віддаль сили $N$ од ядрової точки $2'$ є $\xi$, то ядровий момент її є $N . \xi$; довжина основи є $3\xi$ (в формулі (84) довжина основи $A'A$ є $d$), себ-то за (84) ми маємо

$$p' = \frac{6 \,.\, N . \xi}{(3 \,.\, \xi)^2} = \frac{2 \,.\, N}{3 \,.\, \xi}.$$

Віддаль сили $N$ од першої ядрової точки $1'$ (фіг. 69d) є нуль (точка $m$ припадає на точку $1'$); себ-то ядровий момент сили $N$ відносно точки $1'$ ядра є $N . 0$, себ-то нуль; а через те, згідно з (85), найбільша напруга розтягу в точці $A''$ основи $A'A'$ дорівнює нулеві.

Визначення товщини $\overline{BB'}=y$ (фіг. 69) стінки в версі її, при загаданому дозволеному тискові $p_0$ на ґрунт або на кладку під основою $A'A$ стінки можна перевести й графічно, підставляючи поступінно різні значіння товщини $y$. Припустімо, що є підпірна стінка з ламаним контуром $B_1A_1A_2A_3A_4$ (фіг. 70)



Фіг. 70.

заднього її боку, навантажена по лінії $B_1N$ землі рівномірно розподіленою вантагою $p$ на одиницю поверхні похилої площі $B_1N$; треба визначити товщину $\overline{B_1B}=y$ стінки в вершкові її.

Насамперед будуємо за Понсле́-Ребганом трикутники тисків для окремих частин $B_1A_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$ і $A_3A_4$ стінки і перетворюємо їх у відповідні трапези тисків, і таким чином визначаємо частинні тиски землі $E_1$, $E_2$, $E_3$ і $E_4$; потім за допомогою шнурового многокутника (не показаного на фіг. 70) визначаємо положення й величину рівнодійної $E$ цих окремих тисків землі $E_1$, $E_2$, $E_3$ і $E_4$. Із точки $B_1$ вершка стінки проводимо просту $B_1a_1$ під даним нахилом зовнішнього боку стінки й визначаємо вагу $G_1$ призми

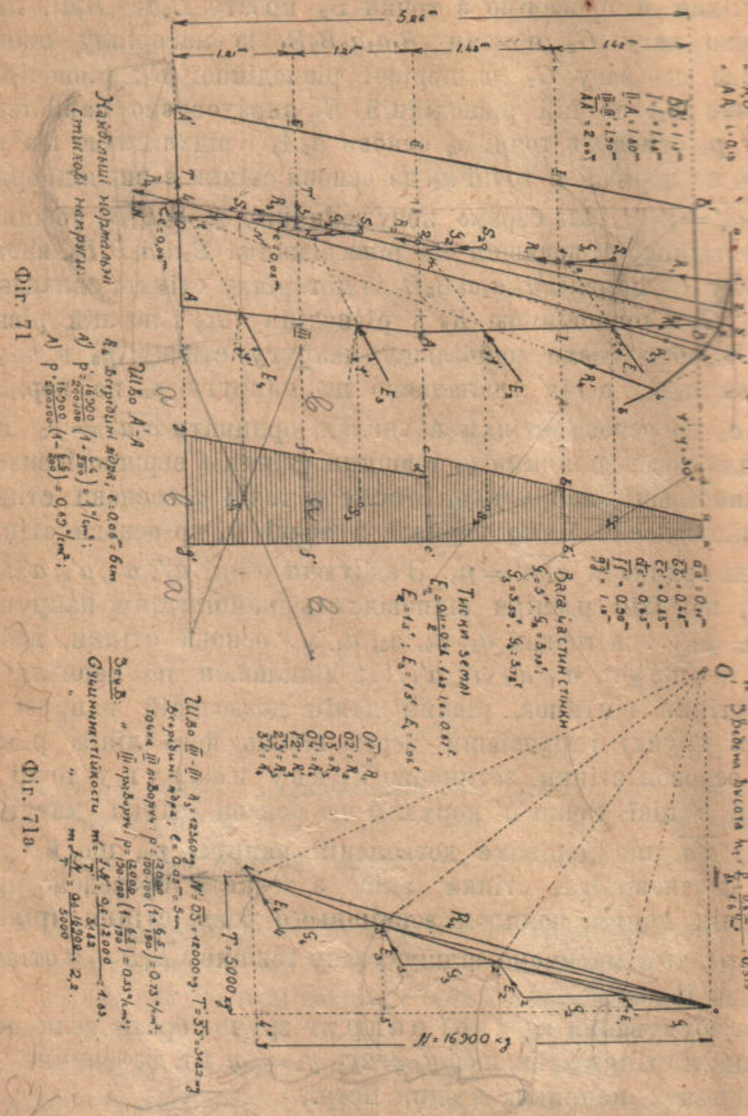
$B_1A_1A_2A_3A_4a_1B_1$ із матеріялу стінки; додаємо цю вагу $G_1$ до повного тиску $E$ землі в рівнодійну $R_1$ і по цій рівнодійній $R_1$ обчислюємо найбільшу напругу $p_1$ стиску в точці $a_1$ основи $a_1A_4$ і відкладаємо цю напругу $p_1$ по нормалі до основи стінки в вигляді ординати $\overline{a_1a'_1}=p_1$. Візьмімо тепер якусь товщину $y_1=\overline{B_1B_2}$ верху стінки й проведімо з точки $B_2$ просту $B_2a_2 \parallel B_1a_1$; далі визначаємо вагу $G_2$ призми $B_1a_1a_2B_2B_1$ із матеріялу стінки й додаємо цю вагу $G_2$ до першої рівнодійної $R_1$; рівнодійну позначаємо $R_2$; по цій рівнодійній $R_2$ вираховуємо найбільшу напругу $p_2$ стиску в точці $a_2$ основи $a_2A_4$ і відкладаємо цю напругу $p_2$ по нормалі в точці $a_2$ до основи стінки в вигляді ординати $\overline{a_2a_2'}=p_2$. Далі беремо нову величину $y_2=\overline{B_1B_3}$ товщини стінки в вершку і, додавши ще рівнобіжника $B_2a_2a_3B_3B_2$, визначаємо вагу $G_3$ призми $B_2a_2a_3B_3B_2$ із матеріялу стінки; складаємо цю вагу $G_3$ з рівнодійною $R_2$ в рівнодійну $R_3$ і по цій рівнодійній $R_3$ обчислюємо найбільшу напругу стиску $p_3$ в точці $a_3$ основи $a_3A_4$; потім одкладаємо цю напругу $p_3$ по нормалі в точці $a_3$ до основи стінки в вигляді ординати $\overline{a_3a_3'}=p_3$. Так само й для нової величини $y_3$ товщини стінки в вершкові визначаємо найбільшу напругу $p_4$ стиску в точці $a_4$ основи стінки $a_4A_4$ і відкладаємо її по нормалі в точці $a_4$ до основи стінки в вигляді ординати $\overline{a_4a_4'}=p_4$. З'єднуючи кінці $a_1', a'_2, a'_3, a'_4, \ldots$ ординат, що їхні розміри відповідають найбільшим напругам $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ в точках $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ основи стінки, маємо криву напруг $a'_1\ a'_2\ a'_3\ a'_4 \ldots$; відклавши по нормалі до основи стінки відтинок, рівний даній дозволеній напрузі $p_0$ (тиск на ґрунт) і провівши через кінець його лінію рівнобіжну з основою стінки, затинаємо криву напруг у точці $a'$; провівши з цієї точки $a'$ нормалю до основи стінки, матимем ординату $\overline{a'a}$, що дорівнює дозволеній напрузі $p_0$, що й буде в точці $a$ основи $aA_4$ стінки; якщо з точки $a$ проведемо просту $aB$ під даним нахилом зовнішнього боку стінки (рівнобіжно $B_1a_1$), то й матимемо відшукувану товщину $\overline{B_1B}=y$ стінки в вершкові її.

Для збудування кривої напруг зручно брати величини для товщини стінки $y$ так, щоб $y_2=2y_1$, $y_3=3y_1$ і т. д.; величину-ж $y_1$ можна взяти, наприкл., в один метр.

Обидва викладені способи визначати товщину стінки в версі її вказав проф. Мюллер-Бреслау (N. Müller-Breslau).

## § 21. Перевірка підпірної стінки.

Припустімо, що маємо підпірну стінку $BA_1AA'B'B$ (фіг. 71) даних розмірів та похилів для її боків. Цю стінку треба пере-



Фіг. 71

Фіг. 71a.

вірити що-до нормальної напруги й пересуву в різних швах її. Ми ділимо кладку стінки швами $I-I$, $II-A_1$, $III-III$ й $A'-A$

на скількись частин (на фіг. 71 чотири частини стінки) і визначаємо ваги $G_1$, $G_2$, $G_3$ та $G_4$ цих частин, що прикладені в осередках ваги $S_1$, $S_2$, $S_3$ та $S_4$ поверхонь відповідних трапезів $B'BI-I$, $I-IA_1II$, $IIA_1III-III$ та $III-IIIAA'$; далі, як це зазначено вище в § 14, будуємо трапези тисків $aa'b'b$, $bb'c'c$, $dc'f'f$ та $ff'g'g$ для частин $B-I$, $I-A_1$, $A_1-III$ та $III-A$ навантаженої стінки; перемноживши ці поверхні трапезів тиску на вагу $\gamma_3$ одиниці об'єму землі, одержуємо величини тисків землі $E_1$, $E_2$, $E_3$ та $E_4$ на частини стінки $B-I$, $I-A_1$, $A_1-III$ та $III-A$; точками зачепу цих тисків землі будуть точки перетину із стінками $B-I$, $I-A_1$, $A_1-III$ та $III-A$ горизонталів, проведених через осередки ваги $S_1$, $S_2$, $S_3$ та $S_4$ трапезів тиску. З'єднуємо тепер сили $G_1$, $E_1$, $G_2$, $E_2$, $G_3$, $E_3$, $G_4$, $E_4$ в силовий многокутник $011'22'33'44'$ (фіг. 71а) і визначаємо окремі рівнодійні $R_1=\overline{01'}$, $R'_2=\overline{1'2'}$, $R'_3=\overline{2'3'}$ та $R'_4=\overline{3'4'}$ відповідно силам $G_1$ та $E_1$, $G_2$ та $E_2$, $G_3$ та $E_3$, $G_4$ та $E_4$; для цих рівнодійних $R_1$, $R'_2$, $R'_3$ та $R'_4$ будуємо з довільним полюсом $O'$ шнуровий многокутник $a1'234b$ (фіг. 71), за допомогою його визначаємо положення рівнодійних $R_1$, $R_2$, $R_3$ та $R_4$ (фіг. 71), прикладених до відповідних частин стінки, що діють відповідно на шви $I-I$, $II-A_1$, $III-III$ та $A'A$; на фіг. 71а в силовому многокутникові ці рівнодійні представлені відповідними векторами, а саме $R_1=\overline{01'}$, $R_2=\overline{02'}$, $R_3=\overline{03'}$ та $R_4=\overline{04'}$. Ці рівнодійні $R_1$, $R_2$, $R_3$ та $R_4$ перетинають відповідні шви $I-I$, $II-A_1$, $III-III$ та $A'-A$ в точках 1, 2, 3 та 4; якщо ці точки 1, 2, 3 та 4 з'єднати простими, то матимемо л і н і ю т и с к у $1'1234$ (фіг. 71) стінки (на фіг. 71 цю лінію тиску для ясности рисунку не позначено). Щоб у швах кладки стінки були самі нормальні напруги стиску (себ-то одного знаку), треба, щоб точки 1, 2, 3 та 4 перетину рівнодійних $R_1$, $R_2$, $R_3$ та $R_4$ із швами не виходили з ядра швів (з середньої третини); коли додержуватися цієї умови, то стійкість стінки що-до її повертання (повалення) забезпечена. Перевірку найбільших нормальних напруг треба робити в тих швах, що в них лінія тиску найбільше наближається до переднього боку $A'B'$ стінки (фіг. 71), себ-то, не виходячи з ядра, найбільше наближається до контуру ядра; в цих швах найбільша нормальна напруга не повинна перевищувати дозволеної напруги стиску.

Вибираючи дозволену напругу стискові, безумовно, треба мати на увазі дозволену напругу стиску для слабшого елемента кладки стінки; наприклад, при цегляній стінці на цементовому розчині дозволену напругу стиску беруть для цегли, а саме $10^{кіл}/_{см}{}^2$ (4 пуди на кв. дюйм); для кладки з природнього тесового каменю на цементі дозволену напругу стиску беруть для портланд-цементного розчину (1 : 3), а саме $20^{кіл}/_{см}{}^2$ (8 пуд. на кв. дюйм). Щоб запобігти зсувові в швах стінки, треба, як це було зазначено в § 3, щоб рівнодійна, прикладена до шва, утворювала з нормаллю до шва кут не більший за кут тертя кладки; додержування цієї умови забезпечує витривалість стінки що-до зсуву. Якщо рівнодійна $R_1$ в шві $A'A$ (фіг. 71) розкладається на нормальну силу $N$ та на силу зсуву $T$, то сила тертя в площі $A'A$ буде $F=f.N$, де $f$ є сучинник тертя для матеріялу кладки стінки; щоб забезпечити витривалість стінки що-до пересуву, треба, щоб сила тертя $F$ була більша за силу зсуву $T$, себ-то $F>T$; отже $F=m.T$, де $m$ є число, більше за одиницю ($m=1$ тільки в випадкові граничної рівноваги); звідси $m=\frac{F}{T}=\frac{f.N}{T}$; це число $m$ показує, в скільки разів ми забезпечили витривалість стінки що-до зсуву, порівнюючи із стінкою в стані її граничної рівноваги, себ-то коли зсув мало-мало що не почався; це число $m$ зветься через це **сучинником витривалости** що-до зсуву; величину цього сучинника $m$ звичайно беруть у межах від 1,5 до 2,5. Отже з викладеного ми робимо висновок, що **для витривалости й міцности стінки неодмінно треба, щоб**: 1) лінія тиску перетинала шви всередині середньої третини товщини стінки, 2) нормальні напруги матеріялу в швах, що в них лінія тиску найбільше наближується до зовнішнього боку стінки, не перевищували дозволеної напруги стиску і 3) напрямок рівнодійної утворював з нормаллю до шва кут, менший за кут тертя кладки по кладці або кладки по ґрунту.

На фіг. 71 у стінки взята позема лінія землі, що навантажена рівномірно-розподіленою вантагою $p=0{,}6^t/_{m^2}$; а що стінку ми беремо цегляну, то вагу куб. метру кладки беремо рівною $\gamma_k=1{,}6^t/_{m^3}$, а вагу куб. метру землі $\gamma_з=1{,}6^t/_{m^3}$; через це зведена до землі висота вантаги $h_r=\frac{p}{\gamma_з}=\frac{0{,}6^t/_{m^2}}{1{,}6^t/_{m^3}}=0{,}375^m$. Щоб збудувати за Понсле-Ребганом трикутники тиску, беремо $\varphi'=\varphi=30^0$; сучинник тертя кладки по ґрунту буде $f=\mathrm{tg}30^0=0{,}6$. Сучинник тертя кладки по кладці (на свіжому розчині) беремо $f=0{,}5$, отже кут тертя кладки по кладці дорівнює $27^0$; деякі автори беруть кут тертя кладки по кладці в $22^1/_2{}^0$, а значить сучинник тертя беруть рівним $f = \text{tg}\, 22^1/_2{}^0 = 0{,}414$. Розбиваємо тепер стінку по висоті на 4 частини $B-I$, $I-A_1$, $A_1-III$ і $III-A$ уявлюваними швами $I-I$, $II-A_1$ й $III-III$ й будуємо, згідно з викладеним вище, трапези тиску $aa'\,b'b$, $bb'c'c$, $dc'f'f$ і $ff'g'g$ для цих частин; коли вибрати маштаб довжин $1^m = 2$ cm., маємо тиски тертя землі на частини $B-I$, $I-A_1$, $A_1-III$ й $III-A$ стінки відповідно

$$E_1 = \frac{0{,}11 + 0{,}48}{2} \,.\, 1{,}42 \,.\, 1{,}6 = 0{,}67^t,\; E_2 = \frac{0{,}48 + 0{,}85}{2}\, 1{,}42 \,.\, 1{,}6 = 1{,}5^t,$$

$$E_3 = \frac{0{,}65 + 0{,}90}{2} \,.\, 1{,}21 \,.\, 1{,}6 = 1{,}5^t \text{ і } E_4 = \frac{0{,}90 + 1{,}12}{2} \,.\, 1{,}21 \,.\, 1{,}6 = 1{,}96^t.$$

Всі ці тиски $E_1, E_2, E_3$ та $E_4$ прикладені в точках перетину стінок $B-I$, $I-A_1$, $A_1-III$ і $III-A$ з горизонталями, проведеними через осередки ваги $S_1, S_2, S_3$ та $S_4$ відповідних трапезів тиску. Ваги окремих частин стінки, як це видко з розмірів стінки на фіг. 71, будуть

$$G_1 = \frac{1{,}15 + 1{,}48}{2} \cdot 1{,}42 \,.\, 1{,}6 = 3^t,\; G_2 = \frac{1 \,.\, 48 + 1{,}80}{2} \cdot 1{,}42 \,.\, 1{,}6 = 3{,}73^t,$$

$$G_3 = \frac{1{,}80 + 1{,}90}{2} \cdot 1{,}21 \,.\, 1{,}6 = 3{,}59^t \text{ і } G_4 = \frac{1{,}90 + 2{,}00}{2} \cdot 1{,}21 \,.\, 1{,}6 = 3{,}78^t.$$

За допомогою силового многокутника $0-1-1'-2-2'-3-3'-4$ (фіг. 71a) визначаємо рівнодійні $R_1$, $R'_2$, $R'_3$ та $R'_4$ відповідно силам $G_1$ та $E_1$, $G_2$ та $E_2$, $G_3$ та $E_3$, $G_4$ та $E_4$; потім за допомогою шнурового многокутника $a-1'-2-3-4$ (фіг. 71) визначаємо рівнодійні $R_2$, $R_3$ та $R_4$ сил $R_1$ та $R'_2$, $R_1$, $R'_2$ та $R'_3$, $R_1$, $R'_2$, $R'_3$ та $R'_4$; ці сили $R_1$, $R_2$, $R_3$ та $R_4$ перетинають відповідні шви $I-I$, $II-A_1$, $III-III$ та $A'A$ в точках 1, 2, 3 та 4, що лежать всередині середньої третини товщини швів (всередині ядра); якщо з'єднаємо ці точки 1, 2, 3 та 4 простими лініями, то й матимемо л і н і ю  т и с к у стінки $1'-1-2-3-4$, що не виходить із середньої третини товщини стінки. Перевірку що-до нормальних напруг та пересуву зроблено на фіг. 71 для швів $III-III$ й $A'-A$.

Рівнодійна $R_3$ у шві $III-III$ кладки стінки дає, коли взято маштаб сил $1^t = 0{,}55$ cm., нормальну складову $N' = \overline{0{,}3''} = 12\,000$ kg. (фіг. 71a) та складову зсуву $T' = \overline{3''3'} = 3\,182$ kg. і має ексцентрицитет $e' = 0{,}06^m = 5$ cm.; а тому нормальні напруги стиску в лівій точці $III$ та правій точці $III$ відповідно будуть:

$$p' = \frac{12000}{190\,.\,100}\left(1 + \frac{6\,.\,5}{190}\right) = 0{,}73^{kg}/_{cm^2}$$

і

$$p = \frac{12000}{190\,.\,100}\left(1 - \frac{6\,.\,5}{190}\right) = 0{,}53^{kg}/_{cm^2};$$

дозволену-ж напругу на стиск для цегельної кладки на цементі беруть рівною $p_0 = 10 - 11^{kg}/_{cm^2}$. Сучинник витривалости що-до зсуву в шві $III - III$ буде $m' = \frac{f\,.\,N'}{T'} = \frac{0{,}5\,.\,12000}{3182} = 1{,}83$; величини-ж сучинника витривалости лежать у межах $1{,}5 - 2{,}5$. Кут $\alpha$, що його утворює рівнодійна $R_3$ з нормаллю до шва $III - III$, з таким сучинником витривалости $m'$ буде невеличкий, а саме приблизно $15^0$, бо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{T'}{N'} = \frac{3182}{12000} = 0{,}26517$. Рівнодійна $R_4$ у шві $A'A$ основи стінки дає нормальну складову $N = \overline{04''} = 16\,900$ kg. (фіг. 71a) і складову зсуву $T = 5\,000$ kg. $= \overline{4''4'}$ і має ексцентрицитет $e = 0{,}06^m = 6$ cm.; а тому нормальні напруги стиску в точках $A'$ та $A$ (тиск на ґрунт у цих точках) будуть відповідно

$$p' = \frac{16900}{200.100}\left(1 + \frac{6.6}{200}\right) = 1^{kg}/_{cm^2}$$

і

$$p = \frac{16900}{200.100}\left(1 - \frac{6.6}{200}\right) = 0{,}69^{kg}/_{cm^2};$$

а дозволений тиск на ґрунт беруть у межах од $2{,}5^{kg}/_{cm^2}$ до $5^{kg}/_{cm^2}$ (від 1 пуду до 2 пудів на кв. дюйм), як до роду ґрунту; напр., для насипного піску $2{,}5^{kg}/_{cm^2}$, для твердої глини $4^{kg}/_{cm^2}$ і для жорстви або піску, що щільно злігся, від 4 до $5^{kg}/_{cm^2}$. Сучинник витривалости що-до зсуву для шва $A'A$ буде

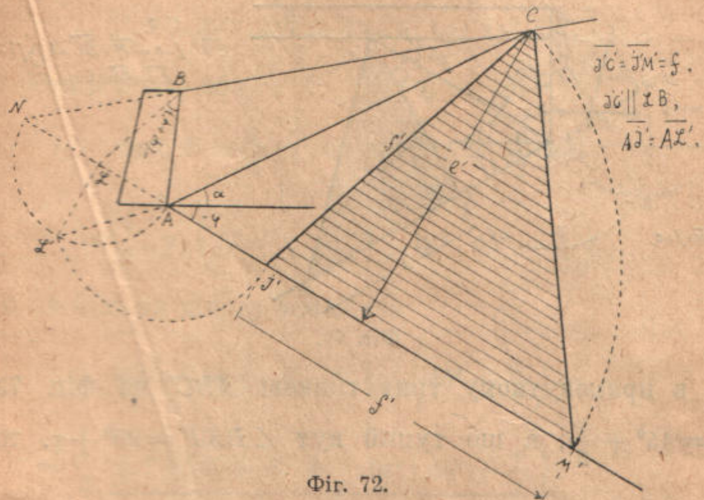
$$m = \frac{f\,.\,N}{T} = \frac{0{,}6\,.\,16900}{5000} = 2{,}2;$$

у цьому шві кут $\alpha$ рівнодійної $R_4$ з нормаллю до шва дорівнює приблизно $16^1/_2{}^0$, бо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{T}{N} = \frac{5000}{16900} = 0{,}29585.$$

## § 22. Графічне визначення відпору землі. Залежність між відпором та розпором землі в окремих випадках.

В § 6 зазначено, що для визначення величини відпору землі можна користуватися з виразу для розпору, змінивши знаки в кутів $\varphi$ та $\varphi'$ на мінус; на підставі цього на фіг. 72

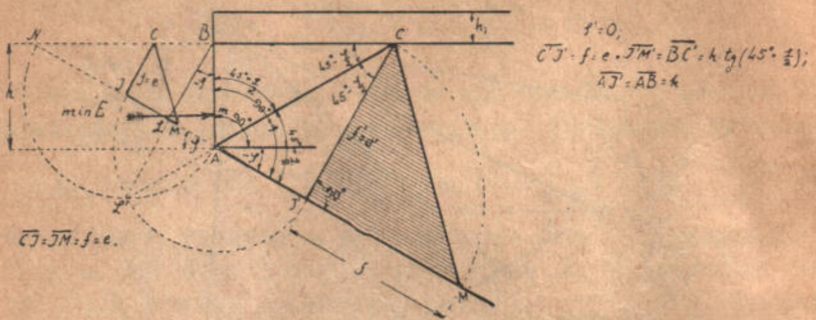



Фіг. 72.

збудовано трикутника тиску $JCM$ для відпору землі за Понслé-Ребганом, причому лінію $AN$ природнього укосу проведено *вниз* од поземої лінії під кутом $\varphi$, а напрямну $BL$ (орієнтаційна лінія або лінія положення) *вліво* від стінки $AB$ під кутом $-(\varphi+\varphi')$; тут на $AN$ збудовано півколо, в точці $L$ поставлено нормаль $LL'$ до $AN$, а з точки $A$, як із осередку лучем $AL'$ затято на продовженні $AN$ відтинок $\overline{AJ'} = AL'$, чим і визначено положення точки $J'$; далі з $J'$ проведено просту $J'C' \parallel BL$ і визначено площу $AC'$ зрушення; відклавши далі на продовженні $AN$ відтинок $\overline{J'M'} = \overline{J'C'} = f'$, матимем трикутника $J'C'M'$ тиску для відпору землі.

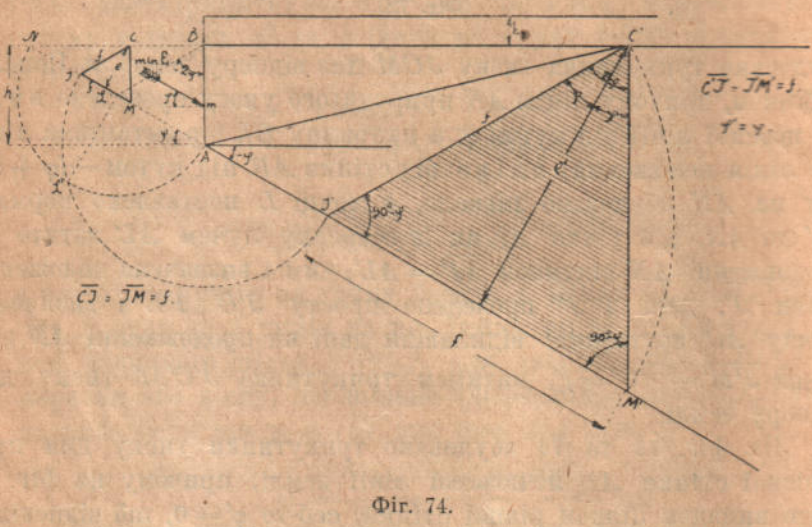
На фіг. 73 та 74 збудовано трикутники тиску для прямовісної стінки $AB$ й поземої лінії землі; причому на фіг. 73 взято випадок цілком рівної стінки, себ-то $\varphi' = 0$, що відповідає спокою земляної маси і є *випадок геостатичний*; на фіг. 74 взято на увагу тертя землі об стінку, що відповідає потягові земляної маси до руху і є випадок *геодинамічний*. Розгляньмо спочатку випадок геостатичний на фіг. 73. За § 10 *для* розпору землі віддаль $\overline{BC'} = h \,.\, \mathrm{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$ (див. фіг. 35), через це для відпору на фіг. 73 віддаль

$$\overline{BC'} = h \,.\, \mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right); \qquad (87)$$



Фіг. 73.

а тому в прямокутному трикутникові $ABC'$ на фіг. 73 кут $\angle BAC' = 45^0 + \frac{\varphi}{2}$; а що тупий кут $\angle BAJ' = 90^0 + \varphi$, то кут



Фіг. 74.

$\angle\, C'AJ' = 90^0 + \varphi - \left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = 45^0 + \frac{\varphi}{2}$, себ-то $\angle\, BAC' = \angle\, C'AJ' = 45^0 + \frac{\varphi}{2}$; таким чином площа $AC'$ зрушення ділить кут $BAJ'$ між лінією $AB$ стінки та $AM'$ природнього укосу навпіл (порівн. фіг. 35 при розпорі). Через те що $J'C' \parallel BL$, а $BL \perp NM'$, трикутник $J'C'M'$ тиску є прямокутний трикутник, що в ньому гострі кути $\angle J'C'M' = \angle J'M'C' = 45^0$. Прямокутні трикутники $ABC'$ та $C'J'A$ поверхнею рівні (бік $AC'$ спільний і $\angle BAC' = = \angle C'AJ'$), отже

$$\overline{C'J'} = BC' = f' = e' = h \,.\, \mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right).$$

За § 10 розпір землі або

$$\max. E = \frac{1}{2} \,.\, \gamma \,.\, h^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \left(h^2 + 2 \,.\, h_r \,.\, h\right) . \, \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right),$$

через це на фіг. 73 відпір землі або

$$\min. E = \frac{1}{2} \,.\, \gamma \,.\, h^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \left(h^2 + 2 \,.\, h_r \,.\, h\right) . \, \mathrm{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right); \tag{88}$$

таким чином, у даному разі відношення відпору й розпору землі буде:

$$\frac{\min.\ E}{\max.\ E} = \frac{\mathrm{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}. \tag{89}$$

При $\varphi = 30^0$ (для звичайного піскуватого ґрунту) з (89) маємо:

$$\frac{\min.\ E}{\max.\ E} = \frac{\mathrm{tg}^2\, 60^0}{\mathrm{tg}^2\, 30^0} = 9.$$

При $\varphi = 27^0$ відношення $\dfrac{\min.\ E}{\max.\ E} = 7{,}1$;

при $\varphi = 22^0$ відношення $\dfrac{\min.\ E}{\max.\ E} = 4{,}9$.

Через те, що $\overline{BC'} = h \,.\, \mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \overline{C'J'} = f'$, відпір землі

за (88) буде
$$\min. E = \frac{1}{2}\gamma' . f'^2 = \text{пов. } \triangle J'C'M' . \gamma'; \tag{90}$$

отже відпір землі, так само як і розпір, є добуток з поверхні трикутника тиску та величини $\gamma'$, що дорівнює в даному разі $\gamma\left(1 + \frac{2 . h_r}{h}\right)$.

Якщо ми візьмемо другу точку $J$ (фіг. 73), що ми її затинаємо на лінії $AN$ природнього укосу, й проведемо $JC \parallel BL$, то матимем прямокутний трикутник $CJM$, в якому беремо $\overline{CJ} = \overline{JM}$; цей прямокутний трикутник $CJM$ буде трикутником тиску для розпору землі, бо всенька частина фіг. 73 ліворуч $AB$ являє собою фіг. 35, збудовану для розпору землі, обернену на 180° коло $AB$. Таким чином на тому самому рисункові фіг. 73 можна через графічне будування визначити $\min. E$ й $\max E$, себ-то відпір та розпір землі.

Через те, що
$$\frac{\triangle C'J'M'}{\triangle CJM} = \frac{f'^2}{f^2},$$
то
$$\frac{\gamma' . \triangle C'J'M'}{\gamma' . \triangle CJM} = \frac{f'^2}{f^2},$$
або
$$\frac{\min. E}{\max. E} = \frac{f'^2}{f^2}.$$

Що-ж до розподілу відпору землі по висоті стінки, то наводячи ті самі міркування, що в § 14 і для розпору землі, знайдемо, що при відпорі тиск на стінку розподіляється так само, як і при розпорі, а тому точка зачепу $m$ (фіг. 73) відпору землі лежатиме на висоті осередку ваги тискового трапезу, який замінює собою тискового трикутника $C'J'M'$, себ-то
$$\overline{Am} = \frac{h}{3} . \frac{3h_r + h}{2h_r + h};$$

у випадкові ненавантаженої стінки на фіг. 73, себ-то при $h_r = 0$, віддаль $\overline{Am} = \frac{h}{3}$. Для випадку на фіг. 74, згідно з § 10 (49) розпір землі

$$\max.\ E = \frac{1}{2} \cdot \gamma' \cdot h^2 \cdot \frac{\mathrm{cs}\varphi}{(1+\mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2})^2} = \gamma' \cdot h^2 \cdot \mathrm{cs}\varphi \cdot \frac{(\mathrm{sn}\,45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2\, 2\varphi}$$ [1])

отже відпір землі

$$\min.\ E = \gamma' \cdot h^2 \cdot \mathrm{cs}\varphi \cdot \frac{(\mathrm{sn}\,45^0 + \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2\, 2\varphi};$$

через це відношення

$$\frac{\min.\ E}{\max.\ E} = \frac{(\mathrm{sn}\,45^0 + \mathrm{sn}\varphi)^2}{(\mathrm{sn}\,45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}; \tag{91}$$

але

$$\frac{\mathrm{sn}\,45^0 + \mathrm{sn}\varphi}{\mathrm{sn}\,45^0 - \mathrm{sn}\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\,\dfrac{45^0+\varphi}{2}}{\mathrm{tg}\,\dfrac{45^0-\varphi}{2}},$$

отже відношення $\frac{\min.\ E}{\max.\ E}$ можна написати й у такій формі:

$$\frac{\min.\ E}{\max.\ E} = \frac{\mathrm{tg}^2\,\dfrac{45^0+\varphi}{2}}{\mathrm{tg}^2\,\dfrac{45^0-\varphi}{2}}. \tag{91'}$$

За (91) маємо: при $\varphi = 30^0$ відношення $\frac{\min.\ E}{\max.\ E} = 33{,}88$;

при $\varphi = 27^0$ відношення $\frac{\min.\ E}{\max.\ E} = 21{,}1$;

при $\varphi = 22^0$ відношення $\frac{\min.\ E}{\max.\ E} = 10$.

Якщо ми візьмемо другу точку $J$ (фіг. 74), що ми її відзначаємо на лінії $AN$ природнього укосу, і проведемо $JC \parallel BL$, то матимем трикутника $CJM$, в якому беремо $\overline{CJ} = \overline{JM}$; цей трикутник $CJM$

---

[1])

$$\frac{1}{(1+\mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2})^2} = \left(\frac{1}{1+\mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2}}\right)^2 = \left[\frac{1-\mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2}}{(1+\mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2}) \cdot (1-\mathrm{sn}\varphi \cdot \sqrt{2})}\right]^2 =$$

$$= \frac{\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{sn}\varphi\right)\right]^2}{(1-2 \cdot \mathrm{sn}^2\varphi)^2} = \frac{2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{sn}\varphi\right]^2}{(\mathrm{cs}^2\varphi + \mathrm{sn}^2\varphi - 2 \cdot \mathrm{sn}^2\varphi)^2} = 2 \cdot \frac{(\mathrm{sn}\,45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2\, 2\varphi}.$$

буде трикутником тиску для розпору землі, бо вся частина фіг. 74 ліворуч $AB$ являє собою фіг. 36, збудовану для розпору землі, обернену на 180° коло $AB$. Таким чином на тому самому рисункові фіг. 74 визначають через графічне будування і відпір землі $\min. E$ і розпір $\max. E$. Але

$$\frac{\triangle C'J'M'}{\triangle CJM}=\frac{f'.e'}{f.e},$$

через це

$$\frac{\gamma.\triangle C'J'M'}{\gamma.\triangle CJM}=\frac{f'.e'}{f.e}$$

або

$$\frac{\min. E}{\max. E}=\frac{f'.e'}{f.e}.$$

Точка $m$ (фіг. 74) зачепу відпору землі $\min. E$ лежатиме на висоті осередку ваги тискового трапезу, що замінює трикутника тиску $C'J'M'$, себ-то

$$\overline{Am}=\frac{h}{3}\cdot\frac{3h_r+h}{2h_r+h};$$

у випадкові ненавантаженої стінки, себ-то коли $h_r=0$, віддаль $\overline{Am}=\frac{h}{3}$. В даному разі на фіг. 74 відпір землі $\min. E$ не буде поземий, як на фіг. 73, а буде справлений до нормали до стінки (себ-то до поземої лінії) під кутом $\varphi$.

## § 23. Глибина закладки основ фундаментів.

У § 6 вже зазначено, що основи фундаментів різних будівель треба спускати на таку глибину, щоб не могло повстати видавлювання ґрунту з-під низу будівлі; причому, згідно з фіг. 24 треба, щоб розпір землі $\max. E$ для призми зрушення $AC_1C'_1C'A$ був менший за відпір землі $\min. E$ для призми відпору $ABC$; такої умови, очевидячки, треба додержувати для кожної одиниці поверхні безконечно-малої площадки $\overline{AA'}=dh$ (фіг. 24) площі $AB$, себ-то треба, щоб напруга розпору $\frac{d(\max. E)}{dh}$ була менша за напругу відпору $\frac{d(\min. E)}{dh}$; таким чином, визначаючи глибину закладки будівлі, як головну умову, ми маємо залежність

$$\frac{d(\max. E)}{dh}\leqq\frac{d(\min. E)}{dh}. \tag{92}$$

*1. Силу тертя в площі AB (фіг. 24) між призмами зрушення і відпору не беруть на увагу ($\varphi' = 0$).*

Для цього випадку згідно з (47*b*) § 10 маємо, що:

$$\max.\ E = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot (h^2 + 2 . H . h) . \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

і

$$\min.\ E = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot (h^2 + 2 . y . h) . \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right);$$

звідси знайдемо, що

$$\frac{d(\max.\ E)}{dh} = \gamma . (h + H) . \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right),$$

а

$$\frac{d(\min.\ E)}{dh} = \gamma . (h + y) . \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right);$$

отже, згідно з умовою (92), маємо, що

$$(h + H) . \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \leqslant (h + y) . \operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$

або

$$\frac{h + y}{h + H} \geqslant \frac{\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)};$$

але

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right),$$

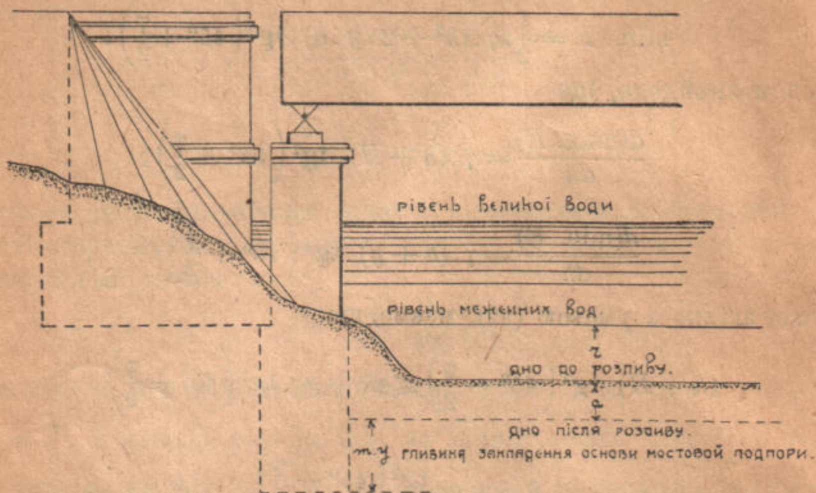
отже

$$\frac{h + y}{h + H} \geqslant \operatorname{tg}^4\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{93}$$

Найменше значіння першої частини нерівности (93) буде тоді, коли $h = 0$; отже $\dfrac{y}{H} \geqslant \operatorname{tg}^4\left(45^0 - \dfrac{\varphi}{2}\right)$; звідси

$$y \geqslant H . \operatorname{tg}^4\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{94}$$

Це є формула проф. Павкера для визначення потрібної глибини закладки основи будівель. При цьому визначену глибину закладки основи $\overline{BB'} = y$ (фіг. 24) для основ на палях лічать од низу паль, а для спускових колодязів та кесонів — од спіднього краю ножа. Одержана величина $y$ із (94) збільшується ще в декілька разів через помноження її на так званий сучинник витривалости $m$, рівний 2 — 3; а далі до величини $m \, . \, y$ додаємо ще можливу глибину розмиву (при мостових та гідротехнічних будовах). На фіг. 75 показано глибину закладки основи мостової




Фіг. 75.

підпори; ця глибина, що ми її лічимо від позему меженних вод, дорівнює $m \, . \, y + a + r$, себ-то дорівнює

$$m \, . \, H \, . \, \mathrm{tg}^4 \left( 45^0 - \frac{\varphi}{2} \right) + a + r.$$

*2. Силу тертя в площі AB (фіг. 24) між призмами зрушення і відпору взято на увагу* ($\varphi' \neq 0$).

У цьому випадкові з попереднього § 22 маємо:

$$\max. \; E = \gamma' \, . \, h^2 \, . \, \mathrm{cs}\varphi \, . \, \frac{(\mathrm{sn}45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi} =$$

$$= \gamma \left( 1 + \frac{2 \, . \, H}{h} \right) . \, h^2 \, . \, \mathrm{cs}\varphi \, . \, \frac{(\mathrm{sn}45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi} =$$

$$= \gamma \, . \, (h^2 + 2 \, . \, H \, . \, h) \, . \, \mathrm{cs}\varphi \, . \, \frac{(\mathrm{sn}45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi}$$

і

$$\min.\ E = \gamma' . h^2 . \mathrm{cs}\varphi \frac{(\mathrm{sn}45^0 + \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi} =$$

$$= \gamma \left(1 + \frac{2 . y}{h}\right) . h^2 . \mathrm{cs}\varphi . \frac{(\mathrm{sn}45^0 + \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi} =$$

$$= \gamma . (h^2 + 2 . y . h) . \mathrm{cs}\varphi . \frac{(\mathrm{sn}45^0 + \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi};$$

звідси маємо

$$\frac{d(\max.\ E)}{dh} = 2 . \gamma . (h + H) . \mathrm{cs}\varphi . \frac{(\mathrm{sn}45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi}$$

і

$$\frac{d(\min.\ E)}{dh} = 2 . \gamma . (h + y) . \mathrm{cs}\varphi . \frac{(\mathrm{sn}45^0 + \mathrm{sn}\varphi)^2}{\mathrm{cs}^2 2\varphi};$$

отже, згідно з умовою (92), знаходимо, що

$$\frac{h + y}{h + H} \geqslant \frac{(\mathrm{sn}45^0 - \mathrm{sn}\varphi)^2}{(\mathrm{sn}45^0 + \mathrm{sn}\varphi)^2};$$

але

$$\frac{\mathrm{sn}45^0 - \mathrm{sn}\varphi}{\mathrm{sn}45^0 + \mathrm{sn}\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{45^0 - \varphi}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{45^0 + \varphi}{2}},$$

а тому

$$\frac{h + y}{h + H} \geqslant \frac{\mathrm{tg}^2\,\frac{45^0 - \varphi}{2}}{\mathrm{tg}^2\,\frac{45^0 + \varphi}{2}};$$

але найменшу величину відношення $\frac{h + y}{h + H}$ матимем, коли $h = 0$, отже

$$\frac{y}{H} \geqslant \frac{\mathrm{tg}^2\,\frac{45^0 - \varphi}{2}}{\mathrm{tg}^2\,\frac{45^0 + \varphi}{2}},$$

або

$$y \geqslant H . \frac{\mathrm{tg}^2\,\frac{45^0 - \varphi}{2}}{\mathrm{tg}^2\,\frac{45^0 + \varphi}{2}}. \tag{95}$$

Коли $\varphi = 30^0$, глибина закладки основи буде $y \geqslant \frac{H}{33,88}$. Звичайно, щоб визначити глибину закладки основи фундаментів будівель, користуються з формули (94) Павкера для 1-го випадку, коли тертя в прямовісній площі між призмами розпору й відпору (фіг. 24) не взято на увагу; це залежить од того, що ґрунт, який його оточує, дуже вогкий і тертя його об стінку невелике, себ-то кут тертя ґрунту об стінку невеличкий, і його можна вважати за нуль ($\varphi' = 0$). Згідно з формулою (94) Павкера, глибина закладки основи, звичайно, буде більша за ту, що ми її обчислюємо за формулою (95), коли тертя ґрунту об стінку взято на увагу; коли $\varphi = 30^0$, за формулою Павкера глибина закладки основи дорівнюватиме $y \geqslant 0{,}111 \,.\, H$, себ-то $y$ приблизно дорівнює $\frac{H}{10}$. Знайдену величину $y$ за (94) треба, звичайно, помножити ще на сучинник витривалости $m = (2 - 3)$; наприклад, при „зведеній до землі висоті“ $H = 5$ метр. глибина закладки фундаменту для підпірної стінки (фіг. 24) була-б дорівнювала $y = \frac{5}{10} \,.\, m = 3 \,.\, \frac{1}{2} = 1{,}5$ (метра). В середній Росії з її підсонням, щоб усунути можливість промерзання, за найменшу глибину закладки основи фундаментів беруть звичайно 2 метри.

# ДЕ ЩО Є.

$A + O_2 \cdot h_1 = 0$ $\quad$ $B + O_2 \cdot h = 0$

$O_2 = -\frac{A}{h_1}$ $\quad$ $B = -h$

$N_2$.

$A - N_2 \cancel{\cos\alpha}$

$N_2 = A$

$B + N_2 = 0$; $\quad N_2 = -B$

$A + D_3 \cos\alpha$; $\quad D_3 = \frac{A}{\cos\alpha}$

$A - D_4 \cdot \cos\alpha$

$D_4 = \frac{A}{\cos\alpha}$ $\quad$ $B + D_4 \cos\alpha$

$B = -1$

$U_3$ $\quad$ $A \cdot 3d - U_3 \cdot h$

$U_3 =$ +

Ціна **1** крб. **75** коп.

№ 21718

УСРР

Державне видавництво